

非平衡载流子

2019年12月14日 15:52

0. 概述

之前所讨论的是热平衡状态下的半导体载流子。这一章将对非平衡状态下的过剩载流子。同样，在非平衡状态下，有准费米能级。

1. 载流子的产生与复合

这一部分分为产生和复合两个部分来讨论。直接间隙和间接间隙在跃迁时载流子的行为不同，所以需要分开讨论。

1.1 平衡状态半导体

在平衡状态下，电子和空穴的产生率和复合率相等。

分别令 G_{no} 和 G_{po} 为电子和空穴的产生率，单位是 $\# / \text{cm}^3 \cdot \text{s}$ 。对于直接带隙，电子和空穴总是成对出现。

分别令 R_{no} 和 R_{po} 为电子和空穴的复合率，单位是 $\# / \text{cm}^3 \cdot \text{s}$ 。对于间接带隙，电子和空穴总是成对消失。

即

$$G_{no} = G_{po}, \quad R_{no} = R_{po}.$$

在平衡状态下

$$G_{no} = G_{po} = R_{no} = R_{po}.$$

1.2 非平衡状态下过剩载流子的产生和复合

为了和平衡状态下区别，符号需要说明。

$\delta n = n - n_0$ 过剩电子浓度等于总电子浓度 - 热平衡电子浓度。

$\delta p = p - p_0$ 过剩空穴浓度等于总空穴浓度 - 热平衡空穴浓度。

g_n' 过剩电子和空穴的产生率。

g_p'

r_n' 过剩电子和空穴的复合率。

r_p'

假设高能光子射入光子，从而使价带中电子进入导带，产生电子-空穴对。这种电子和空穴对称为过剩电子和空穴。由于受外力扰动，已经不再是热平衡状态，且因此被发现。

$$np \neq n_0 p_0 = n_i^2$$

在直接带隙中，复合是一种自发行为，所以电子和空穴的复合率相对时间是一个常数，而且符号的概率率必须和空穴和电子浓度同时成比例。根据这个理论，结合实验数据，我们可以拟合出一个表达式。

电子浓度的变化率为

$$\frac{d\delta n(t)}{dt} = a_r [n_i^2 - n(t)p(t)].$$

代入 $n_i^2 = n_0 p_0$ ， $n(t) = n_0 + \delta n$ 和 $p(t) = n_0 + \delta p$ ，由于是成对复合， $\delta n(t) = \delta p(t)$ 。

$$\frac{d\delta n(t)}{dt} = a_r [-(n_0 + p_0)\delta n(t) - \delta n^2(t)].$$

$$= -a_r \delta n(t) [(n_0 + p_0) + \delta n(t)].$$

在小注入条件（即过剩载流子 $\delta n \ll n_0$ ）下，我们可以对上式进行近似。

在N型半导体中有 $n_0 \gg p_0$ ，所以..

$$\frac{d\delta n(t)}{dt} = -a_r \delta n(t) n_0.$$

这是一个一阶齐次方程。

$$\delta n(t) = \delta n(0) e^{-a_r n_0 t}$$

我们令 $\tau_{no} = \frac{1}{a_r n_0}$

$$\delta n(t) = \delta n(0) e^{-\frac{t}{\tau_{no}}}$$

在P型半导体中。

$$\frac{d\delta n(t)}{dt} = -a_r \delta n(t) p_0.$$

$$\delta n(t) = \delta n(0) e^{-a_r p_0 t}.$$

$$\tau_{po} = \frac{1}{a_r p_0}.$$

τ_{no} 则是一个小注入时的寿命。通常代表了过剩少数载流子的寿命。（注意这和上章的平均碰撞时间有关）复合率恒为负数，对于n型。

$$R_n' = -\frac{d(\delta n(t))}{dt} = a_r n_0 \delta n(t) = \frac{\delta n(t)}{\tau_{no}}.$$

即为 $n_1' - n_1' = a_r n_0 \delta n = \frac{\delta n(t)}{\tau_{no}}$

$$R_n' = -\frac{d(S_n(t))}{dt} = a_1 n_0 S_n(t) = \frac{S_n(t)}{\tau_n}$$

且有: $R_n' = R_p' = a_1 n_0 S(t) = \frac{S_n(t)}{\tau_n}$

对于P型:

$$R_n' = R_p' = \frac{S_n(t)}{\tau_p} = a_1 p_0 S_n(t)$$

过剩载流子的产生并不总是和空穴浓度成函数。一般情况, 是空间和时间的函数, 上述基理也说明了这个结果。

2. 过剩载流子的性质.

当载流子因素例如为外力场时, 移动的电荷和电子都会产生电场。这时载流子移动到源转移扩散, 例如, 外加电场时, 过剩电子和空穴(运动并不相互独立(相反方向移动)), 为分析他们的行为, 我们就需要在更复杂分析。

2.1 连续性方程.

我们取一个微分体积元(标度, 直角坐标系), F_p^+ 为电子粒子流密度。
因为电荷守恒, F_{pm} 可以近似成线性的。 单位: $\text{个}/\text{cm}^2 \cdot \text{s}$

$$F_{px}^+(x+dx) = F_{px}^+(x) + \frac{\partial F_{px}^+}{\partial x} \cdot dx$$

单位时间内由x方向的粒子流产生的电荷守恒量

$$\frac{\partial p}{\partial t} dx dy dz = [F_{px}^-(x) - F_{px}^+(x+dx)] dy dz$$

这里下标有单位电荷, 单位时间。我们这里实际上已经用了高斯定理。

代入高斯公式, 得:

$$\frac{\partial p}{\partial t} dx dy dz = -\frac{\partial F_{px}^+}{\partial x} dx dy dz$$

如果考虑三维, 即电荷不仅流过x方向, 则有:

$$\frac{\partial p}{\partial t} dx dy dz = -\nabla \cdot \vec{F}_p^+ dx dy dz$$

空穴还会有产生和复合率。

对于产生, 我们这里考虑更是要忽略过剩载流子。对于把平衡的粒子来说, 复合率跟实际计算方法是一样的, 所以也有 τ_{pl} 表示其寿命。

所以, 连续性方程还包括加上空穴的产生和复合, 那么有:

$$\frac{\partial p}{\partial t} dx dy dz = -\frac{\partial F_{px}^+}{\partial x} dx dy dz + g_p dx dy dz - \frac{p}{\tau_{pl}} dx dy dz$$

同除 $dx dy dz$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial F_{px}^+}{\partial x} + g_p - \frac{p}{\tau_{pl}}$$

这就是空穴一维连续性方程。对于电子:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial F_{nx}^-}{\partial x} + g_n - \frac{n}{\tau_{nl}}$$

其中 F_{nx}^- 是电子流密度, 单位是 $\text{个}/\text{cm}^2 \cdot \text{s}$ 。

关于全电流方程的理解: 这个推导的过程其实就是在建立了一个简单的模型来推导了菲克第二定律。我们曾经在《载流子的输运》中介绍过, 其数学形式如下: $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial F_{px}^+}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial F_{nx}^-}{\partial x}$

那么, 加上半导体特有的产生和复合, 则有连续性方程。连续性方程就是为了解决不连续的问题, 而这里解决了在半导体中不连续的问题。

2.2 与时间有关的扩散方程.

载流子是扩散方程未定也好还是非平衡态也好。重点是理解(这其中的过程, 有外场的方向会影响平衡的平衡)。

从而便系统进入非平衡状态。这时系统行为符合菲克第二定律。

我们在爱因斯坦关系推导出了平衡状态下扩散系数和迁移率的关系, 利用了菲克第一定律。那么对于非稳态, 菲克第二定律仍作为基础, 加入了产生和复合率后, 构成连续性方程。而对应的单位体积的一维通量, 则为流密。

我们曾经推导过

$$J_p = e \mu_p p E - e D_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad J_n = e \mu_n n E + e D_n \frac{\partial n}{\partial x}$$

这个方程由于存在电场和浓度差也是一种非稳态, 只是我们当时认为他处于非平衡状态, 但是是非稳态的。

所以我们将他同除 e , 即可得到对应的 F_p^+ , 同除 $(-e)$ 则得到 F_n^-

$$F_p^+ = \mu_p p E - D_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad F_n^- = -\mu_n n E - D_n \frac{\partial n}{\partial x}$$

我们需要思考的是: 这个流量, 代入上面连续性方程中求解? 这里要看这个情况的条件, 但是也是非稳态的, 但是 p 和 n 实际上是非稳态的, 但是 D_p 和 D_n 本身是平衡态的, 此外, 只用了菲克第二定律, 这个非稳态, 一直成立。

我们需要思考的是：这个浓度代入上面连续性方程中麻烦？这个要看这个浓度的条件了。但是它是非稳态的。但是 \$p\$ 和 \$n\$ 实际上也是平衡的浓度 \$p_0\$ 和 \$n_0\$。这实际上代表了三态浓度。此外，还涉及到菲克第一定律。这个平衡态无非是一致性。一个疑惑点在于，对于随时间和坐标变化的方程，上一节中，我们在研究菲克第一定律时，认为系统处于平衡。例如流为恒流值，那么浓度就不是时间的函数，只是位置的函数，那么这种浓度在一维上只能是一维函数。所以我们在用费米能级求静电场时，浓度的模型是那种的模型。在这里，浓度会随着复合率和产生率而改变。这个是无法避免的，所以符合了菲克第二定律。

现在可以代入了。

对于 \$P\$ 型：

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial F_p}{\partial x} + G_p - \frac{p}{\tau_p t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [\mu_p \cdot p \cdot E - D_p \frac{\partial p}{\partial x}] + G_p - \frac{p}{\tau_p t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = - \mu_p \frac{\partial (p \cdot E)}{\partial x} + D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + G_p - \frac{p}{\tau_p t}$$

同理，对于 \$N\$ 型：

$$\frac{\partial n}{\partial t} = + \mu_n \frac{\partial (n \cdot E)}{\partial x} + D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + G_n - \frac{n}{\tau_n t}$$

\$\frac{\partial (p \cdot E)}{\partial x}\$ 或 \$\frac{\partial (n \cdot E)}{\partial x}\$ 可以展开。在三维中，则为 \$\nabla \cdot (p \cdot E)\$

展开后得到：

$$D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \mu_p (E \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial E}{\partial x}) + G_p - \frac{p}{\tau_p t} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

和

$$D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu_n (E \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial E}{\partial x}) + G_n - \frac{n}{\tau_n t} = \frac{\partial n}{\partial t}$$

我们知悉 \$p = p_0 + \delta p\$, \$n = n_0 + \delta n\$ 而 \$p_0\$ 和 \$n_0\$ 在上节讨论中我们知悉，他们不是时间的函数。最后都会达到平衡了，\$J = 0\$。

即 $J = D_p \frac{\partial p}{\partial x}$ 而 $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ，所以 \$J = 0\$。

在这种情况下（不存在扩散），所以 \$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\partial n_0}{\partial x} = 0\$

那么我们又可以写成：

$$D_p \frac{\partial^2 (\delta p)}{\partial x^2} - \mu_p (E \frac{\partial (\delta p)}{\partial x} + p \frac{\partial E}{\partial x}) + G_p - \frac{p}{\tau_p t} = \frac{\partial (\delta p)}{\partial t}$$

$$D_n \frac{\partial^2 (\delta n)}{\partial x^2} + \mu_n (E \frac{\partial (\delta n)}{\partial x} + n \frac{\partial E}{\partial x}) + G_n - \frac{n}{\tau_n t} = \frac{\partial (\delta n)}{\partial t}$$

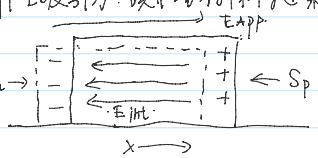
→ 双极输运

由于过剩的电子和空穴都是成对产生的，当然这里说的是直接带隙。\$g_n' = g_p'\$, \$R_n = R_p\$。所以他们的距离相当近。我们之前在静电场中已经提到过内建电场。当前的内建电场是由能级的弯曲引起。那么，在平衡状态下，我们假设没有外加电场。所以有3度因而损失。

而对于过剩空穴—电子对来说，他们之间的库仑力产生吸引。该中均保持过剩电子和空穴以同一迁移率或扩散系数一起漂移或扩散。

这种现象被称为双极输运。

[注] 目前的研究认为他们的相对位置将保持不变。



3.1 双极输运方程的推导。

由于库仑力，所以我们可以用：库仑定律来描述。

$$\nabla \cdot E_{int} = \frac{e(S_p - S_n)}{\epsilon_0} = \frac{\partial E_{int}}{\partial x}$$

\$\epsilon_0\$ 为半导体的介电常数。

我们首先假设 \$|E_{int}| \leq |E_{app}|\$

由于我们认为他们一起运动，所以相同之间的迁移率和扩散因子可以认为是相同的。

\$\nabla \cdot E_{int}\$ 不为0，但是不能忽略。

我们知道 \$g_p = g_n = g\$, \$R_p = R_n = r\$。而且根据空穴—电子对假设，\$S_n \approx S_p\$。

将与时间有关的扩散方程用 \$S_n\$ 改写。

$$D_n \frac{\partial^2 S_n}{\partial x^2} - \mu_n (E \frac{\partial S_n}{\partial x} + S_n \frac{\partial E}{\partial x}) + G_n - \frac{S_n}{\tau_n t} = \frac{\partial S_n}{\partial t}$$

我们知道 $g_p = g_n = g$, $R_p = R_n = R$. 而且根据空穴-电子对称假设, $\delta_n \approx \delta_p$.
将有时变有关的扩散方程用 δ_n 改写.

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta_n}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 (\delta_n)}{\partial x^2} - u_p \left(E \frac{\partial (\delta_n)}{\partial x} + p \frac{\partial E}{\partial x} \right) + g - R & \text{①} \\ \frac{\partial (\delta_n)}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 (\delta_n)}{\partial x^2} + u_n \left(E \frac{\partial (\delta_n)}{\partial x} + n \frac{\partial E}{\partial x} \right) + g - R & \text{②} \end{cases}$$

那么 $u_n \cdot n \cdot \text{①} + u_p \cdot p \cdot \text{②}$ 可以约去 $\frac{\partial E}{\partial x}$ 项.

$$(u_p \cdot p + u_n \cdot n) \frac{\partial (\delta_n)}{\partial t} = (u_n \cdot n \cdot D_p + u_p \cdot p \cdot D_n) \frac{\partial^2 (\delta_n)}{\partial x^2} + u_n u_p (p - n) E \frac{\partial (\delta_n)}{\partial x} + (u_n \cdot n + u_p \cdot p) (g - R).$$

有很多项都有 $(u_p \cdot p + u_n \cdot n)$, 这其实是我们的有效电导率的一部分, $= \frac{\sigma}{e}$, 约去这项.

$$\frac{\partial (\delta_n)}{\partial t} = D' \frac{\partial^2 (\delta_n)}{\partial x^2} + W E \frac{\partial (\delta_n)}{\partial x} + g - R.$$

其中

$$D' = \frac{u_n \cdot n \cdot D_p + u_p \cdot p \cdot D_n}{u_n \cdot n + u_p \cdot p} \quad W = \frac{u_n \cdot u_p (p - n)}{u_n \cdot n + u_p \cdot p}.$$

于是, 我们得到了双极扩散方程. 推导的过程中, 我们发现我们什么都没有做, 仅仅是认为 $\delta_n \approx \delta_p$. 真的推导出来了.

D' 我们称为双极扩散系数, W 称为双极迁移率.

我们可以利用这个方程, 将电子和空穴等效为一种粒子. 那么这个粒子对电场具有相同迁移率和扩散系数.

由于 D' , W 中都有 n, p , 即与 δ_n, δ_p 有关. 所以这个微分方程本质上是一种非线性微分方程.

在上一章中, 我们利用平衡条件下, 电流为 0, 推导出爱因斯坦关系. 或者说, 证明了这种关系. 这种关系是在任何情况下都成立. 因为, 这个关系中包含了温度、浓度, 已经包括了所有的影响因子.

$$\frac{D_n}{u_n} = \frac{D_p}{u_p} = \frac{kT}{e}.$$

所以在 D' 可以约去 u . 得:

$$D' = \frac{D_n D_p (n + p)}{D_n \cdot n + D_p \cdot p}.$$

3.2 掺杂及注入的约束条件.

上述方程不太好看, 所以需要简化. 进行定性讨论. 例如 p 型半导体, 有 $p_0 \gg n_0$, 小注入意味着 $\delta_n \ll p_0$.

D_n 和 D_p 的数量级也差不多. 那么我们就可以根据公式约去 n . $D' = \frac{D_n D_p p}{D_p \cdot p}$, 所以 $D' \approx D_n$. W 根据公式为 u_n .

对于小注入 p 型掺杂半导体, 很关键的一点是, 我们可以认为双极扩散系数和双极迁移率分别为少数载流子电子的扩散系数. 于是我们就把非线性微分方程转换为线性微分方程.

同理, 对于小注入 n 型半导体, 则有 $D' = D_p$ 和 $W = -u_p$. 注意这里存在一个负号. 因为我们的推导方程中平衡是一个双极平衡. 而 n 型半导体自然电子占多数. 也就是 ② 式为主导. 那么自然形而上为电子扩散, 即. 漂移电流为 $-u_n \cdot n \cdot E$. 对应的有时变有关的连续性方程为 $-u_n \frac{\partial \delta_n}{\partial x} \cdot E$.

剩下需要讨论的则是产生率和复合率. 由于电子和空穴的复合率相等. 根据等式 $R_n = R_p = n / \tau_{nt} = p / \tau_{pt}$.

其中 τ_{nt} 和 τ_{pt} 分别是电子和空穴的平均寿命. 如果考虑寿命与浓度, $1/\tau_{nt}$ 为单位时间内电子遇到空穴所复合的机率. 同理 τ_{pt} 为空穴遇到电子所复合的机率. 而多数载流子的浓度可以认为是一个常数. 所以 $\tau_{nt} \approx \tau_n$, $\tau_{pt} \approx \tau_p$. 也就是少数载流子的寿命为常数. 而对于多数载流子. 由于少子的数量级由于注入可能增加几个数量级. 所以, 多数载流子的寿命会发生变化.

那么对于电子来说.

$$g - R = g_n - R_n = (G_{no} + g_n') - (R_{no} + R_n'), \text{ 对于平衡状态有 } G_{no} = R_{no}$$

$$\text{于是 } g - R = g_n' - R_n' = g_n' - \frac{\delta_n}{\tau_n}.$$

同理对于空穴.

$$g - R = g_p' - R_p' = g_p' - \frac{\delta_p}{\tau_p}, \text{ 而 } g_p' = g_n' = g'$$

那么到此为止.

我们现在可以把双极扩散方程所有非线性的部分约去了.

对于小注入 p 型半导体, 我们有:

$$D_n \frac{\partial^2 (\delta_n)}{\partial x^2} + u_n E \frac{\partial (\delta_n)}{\partial x} + g' - \frac{\delta_n}{\tau_n} = \frac{\partial (\delta_n)}{\partial t}.$$

对于小注入 n 型半导体, 我们有:

$$D_p \frac{\partial^2 (\delta_p)}{\partial x^2} - u_p E \frac{\partial (\delta_p)}{\partial x} + g' - \frac{\delta_p}{\tau_p} = \frac{\partial (\delta_p)}{\partial t}.$$

对电子和空穴的迁移和扩散同时进行. 同时我们可以用过剩少子浓度 δ_n 来描述. (这样, 过剩电子的浓度就由少子的浓度来决定. 这种双极现象在半导体物理中非常重要. 它是描述半导体器件状态的基础.)

而最后的公式, 我们可以直接从第 2 章的有时变有关的扩散方程直接推导.

... .. 加入点高对非线性时变性的分析和对 G, R 的分析

来记忆。这种双极现象在半导体物理中非常重要。它是描述半导体器件状态的基础。

而最后的公式，我们可以直接从第2章的与时间有关的扩散方程直接推导。

$$\nabla \cdot E_{int} + \nabla \cdot E_{app} = \nabla \cdot E_{int} = \frac{(p-p_0)q}{\epsilon_s}, \text{ 我们可以直接认为他如。加入高斯对于非线性到线性的近似和对G.P.的分析}$$

将上述反替换过剩少子的浓度，就可以得到最后的结论

3.3 双极扩散方程的应用

我们用双极及扩散方程来解决几个具体的问题。这些例子有助于描述半导体材料中过剩载流子的行为。而得到的结论会在稍后有关PN结和其他半导体器件的讨论中用到。

首先给出一些条件下的简化形式

状态	结论
稳态状况	$\frac{\partial(\delta n)}{\partial t} = 0, \frac{\partial(\delta p)}{\partial t} = 0.$
(过剩载流子均匀分布) (产生率相同)	$D_n \frac{\partial^2(\delta n)}{\partial x^2} = 0, D_p \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} = 0.$
零电场	$E \frac{\partial(\delta n)}{\partial x} = 0, E \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} = 0.$
无过剩载流子产生	$g' = 0.$
无过剩载流子复合(寿命无限)	$\frac{\delta n}{\tau_{n0}} = 0, \frac{\delta p}{\tau_{p0}} = 0.$

[例1] 无限大均匀n型半导体，无外加电场。假设在 $t=0$ ，材料中存在浓度均匀的过剩载流子，而在 $t>0$ 时， $g'=0$ 。若假设过剩载流子浓度远小于平衡载流子浓度，即本注入状况，试计算 $t>0$ 时的过剩载流子浓度。

■ 解：

本注入状况，考虑少子空穴。

$$D_p \frac{\partial^2(\delta p)}{\partial x^2} - \tau_p E \cdot \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} + g' - \frac{\delta p}{\tau_{p0}} = \frac{\partial(\delta p)}{\partial t}$$

再次注意。这里 $-\tau_p E$ 由 $F = -D \frac{\partial p}{\partial x}$ 和 $F = -D \frac{\partial n}{\partial x}$ 共同作用的结果。所以 D 为 τ_p ， n 为 p 。

均匀，无电场 $t>0$ 时 $g'=0$ 。

所以

$$\frac{\partial(\delta p)}{\partial t} = -\frac{\delta p}{\tau_{p0}}$$

→ $\delta p(t) = \delta p(0) e^{-t/\tau_{p0}}$ ，这对应于注入的结果相对应，半衰期是非平衡态。根据电中性条件，有 $\delta n(t) = \delta p(t)$ ，即过剩电子的浓度为 $\delta n(t) = \delta p(0) e^{-t/\tau_{p0}}$ 。

■ 代数解

n型半导体 $N_d = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ， $t=0$ 时，有正电荷共有 10^{14} 个电子空穴对，少子空穴寿命为 $\tau_{p0} = 10 \text{ ns}$ 。

因为 $\delta p(0) \ll n_0$ ，所以可以应用本注入条件。有 $\delta p(t) = 10^{14} e^{-t/10^{-8}} \text{ cm}^{-3}$ 。

10 ns 的时间将在浓度为初始值的 $1/e$ 。

[例2] 无限大均匀n型半导体，无外加电场。假设在 $t<0$ 时，半导体处于平衡状态；而在 $t>0$ 时，假设具有均匀的产生率。试计算在本注入状态下，过剩载流子浓度的时间函数。

■ 解：

$$\text{均匀，无电场。} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = 0, E \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0, \text{产生率均匀。} \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0.$$

2M. 方程可以化简为

$$g' - \frac{\delta p}{\tau_{p0}} = \frac{\partial(\delta p)}{\partial t}$$

均匀稳态时刻 $t=0$ 。处于平衡状态，即说明 $\delta p(t=0) = 0$ 。所以解为

$$\delta p(t) = g' \tau_{p0} (1 - e^{-t/\tau_{p0}})$$

■ 代数解

假设 $\tau = 300 \text{ ps}$ 时，n型半导体的掺杂浓度为 $N_d = 2 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ， $\tau_{p0} = 10^{-7} \text{ s}$ ， $g' = 5 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

那么，代入公式

$$\delta p(t) = 5 \times 10^{14} (1 - e^{-t/10^{-7}}) \text{ cm}^{-3}.$$

即可代入公式

$$\rho_p(t) = 5 \times 10^{14} (1 - e^{-t/10^{-7}}) \text{ cm}^{-3}$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 会出现稳态过剩载流子浓度和空穴浓度, 所以也符合之前假设的本注入条件。
因为, 随着过剩的过剩载流子浓度逐渐增加, 复合率逐渐变大, 最后过剩载流子的浓度也会趋于稳定。

[例子] 无限大的均匀 p 型半导体, 无外加电场。假设对于一维晶体, 过剩载流子只在 $x=0$ 处产生, 如图产生载流子分别向 $+x$ 和 $-x$ 扩散, 试将稳态过剩载流子浓度 δn 的函数。



■ 解:

首先导出过剩载流子的完整方程。

$$D_n \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} + \mu_n \cdot E \frac{\partial \delta n}{\partial x} + g' - \frac{\delta n}{\tau_{n0}} = \frac{\partial \delta n}{\partial t}$$

代入稳态条件, 稳态时 $\frac{\partial \delta n}{\partial t} = 0$, 无电场 $E=0$, 当 $x \neq 0$ 时, 有 $g'=0$ 。

$$\text{则 } D_n \frac{d^2 \delta n}{dx^2} - \frac{\delta n}{\tau_{n0}} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \delta n}{dx^2} - \frac{\delta n}{D_n \tau_{n0}} = 0$$

特征根为 $\pm \sqrt{\frac{1}{D_n \tau_{n0}}}$, D_n 单位为 cm^2/s , τ_{n0} 单位为 s , 所以 $\sqrt{D_n \tau_{n0}}$ 有距离 cm 的单位。

我们定义 $L_n = D_n \tau_{n0}$, L_n 是过剩载流子电子的平均扩散长度, 于是特征根为 $\pm \frac{1}{L_n}$

通解:

$$\delta n(x) = A e^{-x/L_n} + B e^{x/L_n}$$

再代入两个边界条件, $x=+\infty$ 时 $\delta n(x)=0$, $x=-\infty$, $\delta n(x)=0$ 。

当 $x>0$ 时, $B=0$, 当 $x<0$ 时, $A=0$ 。

$$\delta n(x) = \begin{cases} \delta n(0) e^{-x/L_n} & x \geq 0 \\ \delta n(0) e^{x/L_n} & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\delta n(0)$ 为 $x=0$ 处过剩载流子浓度值。若稳态, 可以认为 $\delta n(0) = g \cdot \tau_{n0}$, 稳态过剩载流子浓度从 $x=0$ 处向两侧呈指数衰减。

■ 代入解:

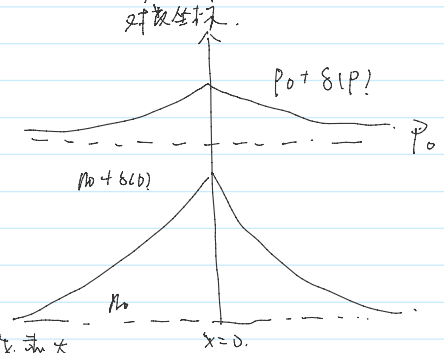
假设 $T=300\text{K}$ 时, p 型半导体的掺杂浓度为 $N_d = 5 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $\tau_{n0} = 5 \times 10^{-7} \text{ s}$, $D_n = 25 \text{ cm}^2/\text{s}$, $\delta n(0) = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ 。

少数载流子扩散长度 $L_n = \sqrt{D_n \tau_{n0}} = 35.4 \mu\text{m}$ 。

对于 $x > 0$, 有 $\delta n(x) = 10^{14} e^{-x/35.4 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-3}}$ 。

我们可以看到, 稳态浓度在 $x=35.4 \mu\text{m}$ 处衰减为原值的 $1/e$ 。

图中展示了载流子浓度和距离的关系, 电子空穴的浓度似乎没有改变, 载流子的浓度会有几个数量级的变化。



例1, 例2, 例3, 都假设在了稳态状态, 所以 $\frac{\partial \delta n}{\partial t} = 0$, 如果在不稳态的状态, 那么方程将变为偏微分方程, 目前暂不会分析, 后面的结论, 求方程解法我们是需要掌握的。

[例子] 假设 n 型半导体在 $x=0$ 处且 $t=0$ 处瞬间产生了有限数量的电子-空穴对, 而在 $t>0$ 时, $g'=0$, 半导体外加一个 $+x$ 方向的恒定电场。试算过剩载流子随 x 和 t 变化的函数。

■ 解:

$$D_p \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} - \mu_p E_0 \frac{\partial \delta p}{\partial x} + g' - \frac{\delta p}{\tau_{p0}} = \frac{\partial \delta p}{\partial t}, \text{ 而 } g'=0$$

我们用这里不能不加解释的抄答案了

$$\rho_p(x, t) = f'(x, t) e^{-t/\tau_{p0}}$$

将上式的解代入方程, 可得:

$$D_p \frac{\partial^2 f'(x, t)}{\partial x^2} - \mu_p E_0 \frac{\partial f'(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial f'(x, t)}{\partial t}$$

对上式进行拉普拉斯变换, 最终可得:

$$f'(x, t) = \frac{1}{(4\tau_{p0} v)^{1/2}} \cdot \exp \left[\frac{-(x - \mu_p E_0 t)^2}{4D_p \tau_{p0}} \right]$$

所以, 最终的解为:

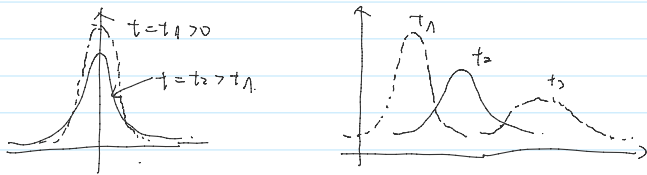
$$p'(x,t) = \frac{1}{(4\pi D p t)^{1/2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \mu p E_0 t)^2}{4 D p t}\right]$$

所以，最终的解为：

$$G p(x,t) = \frac{e^{-t/\tau_p}}{(4\pi D p t)^{1/2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \mu p E_0 t)^2}{4 D p t}\right]$$

可以看出，这个方程上还有一个量，我们稍后再讨论。

1) 无外加电场，退化半导体 2) 有外加电场



3.4. 介电弛豫时间常数。

在一半导体的极化扩散方程之前来推导，这对于思维的连续来说是重要的。

对于平衡态的电荷中性条件我们已经学习过了，我们再用其他推导出了载流子的浓度。

例如，对于N型半导体

$$N_D = \frac{N_D - N_A}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_D - N_A}{2}\right)^2 + n_i^2}$$

电荷中性条件是普遍存在于半导体内部的，因为，粒子总是从有序走向无序的，世界是熵增的。无序的结果就是半导体的内部出现电中性。电中性也意味着电荷守恒，所以才会有一个过剩电子对应一个过剩空穴。那么，我们注入也只能是少数，如果注入多子的话，会受到相等的库仑作用排斥表面，如果注入少数，则相反，会从表面或掺杂杂质中额外补充多子来维持平衡。所以，我们在研究非平衡状态时，可以和非平衡态的平衡态做叠加处理。一方面我们研究的深度梯度，另一方面则是注入并不影响平衡的状态。

当电中性被打破，则会因为电荷作用产生内建电场，从而使得电中性得到恢复，电荷分布的广度和时间尺度都会变化。

那么在这个状态中，我们称为准电中性条件。忽略内建电场的电荷守恒的问题。

我们现在就来分析一下准电中性状态，假设注入少数。

我们可以用泊松方程和菲克第二定律出发

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{q p - n_{ex}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \text{外加麦克斯韦方程组的补充条件, } J = q E$$

这里忽略了产生和复合，所以并不严谨，但是为什么可以忽略呢？个人大体上认为少子的产生和复合已经在注入时达到了平衡，而且条件是少数子是激发了过剩多子，所以可以忽略。

那么，

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot p$$

扩散方程，还是一阶， $p = p_0 e^{-t/\tau_p} = p_0 e^{-t/2d}$

$2d$ 称为介电弛豫常数， $2d = \frac{\epsilon_0}{q p_0}$ ，指的是从准电中性到电中性的时间长度。

例如，对于掺杂浓度 $N_D = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ 的N型半导体来说，假设没有空穴。

$$\Delta = e \mu_D N_D \approx 1.92 \text{ (V} \cdot \text{cm)}^{-1}$$

$$E = \Delta \epsilon_0 = (11.7) (8.85 \times 10^{-14}) \text{ F/cm}$$

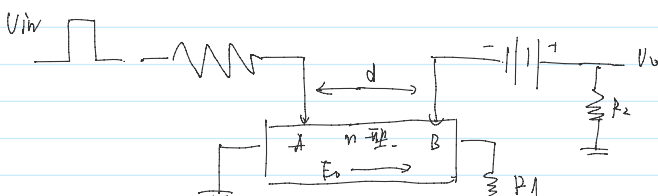
$$2d = \frac{\epsilon_0}{\Delta} = 5.39 \times 10^{-13} \text{ s}$$

一般为几个 $2d$ 时间， $e^{-t/2d} \rightarrow 0$ ，那么大约 $2 \times 10^{-12} \text{ s}$ ，这和过剩载流子 0.1 MeV 的寿命相比，非常迅速。

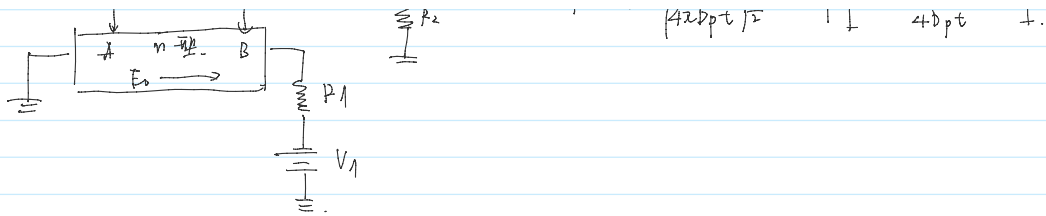
3.5 海恩斯-尚克莱实验。

海恩斯-尚克莱用这个实验不仅可以测得扩散系数，还能测得迁移率和少数子寿命。在这个实验中，它揭示的结果是电荷中性是不成立的。

大体思路如下，用已知量表示未知，我们可以测得例如图中图形，和可以近似测得相应的参数。



$$G p(x,t) = \frac{e^{-t/\tau_p}}{(4\pi D p t)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x - \mu p E_0 t)^2}{4 D p t}\right]$$



构成一个同侧的一样的条件。A点用于抽取过剩电子，B点用于收集。并由此画出曲线。



很容易理解。最高峰出现在 $x - v_p E_0 t = 0$ 。x即为d。AB之间的距离，t为t_0，我们就能测得。

那么 $v_p = \frac{d}{E_0 t_0}$ 。很简单，很准。

对于载流子浓度不足用阶跃条件。

我们可以取t_0/2时的点，那么会有两个。我们用通常的近似法求反照 $\frac{e^{-t/m}}{1 + \mu_p P_1 t}$ ，从而上面说n'为1。

那么

$$D_n = \frac{(\mu_p E_0)^2 d^2 t^3}{4 t_0}$$

由于有忽略和近似。所以不太准。公式也很复杂。

曲线下的面积可以写为

$$S = k \exp\left(-\frac{t_0}{\tau_{p0}}\right) = k \exp\left(-\frac{d}{\mu_p E_0 \tau_{p0}}\right), \quad k \text{ 为一个常数}$$

我们只要求出 $\ln(S)$ 相对于 $d/\mu_p E_0$ 的导数。可以求得为 $1/\tau_{p0}$ ，利用它可以求出少子寿命。
通常，认为这个面积代表着过剩电子没有和多数复合的部分。

4. 准费米能级

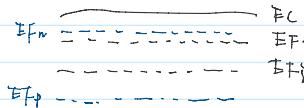
之前在推导费米能级时，我们给了限定条件。即为平衡状态。那么对于非平衡状态，我们还在继续使用费米能级。那么我们就需要在非平衡中寻找平衡。那么非平衡状态下的费米能级称为准费米能级。

事实上，电子系统的平衡状态是难以实现的。在一个能带范围内，热扰动十分频繁，导致短时间内能带内一个能带的平衡。然而，电子在两个能带之间，例如导带和价带之间的热扰动就会较少。毕竟禁带有一定宽度。

将平衡视为保持时，我们可以认为，与带内的电子和价带中的电子分别处于平衡态。而导带和价带之间则为非平衡状态。因此，费米能级对于导带和价带是分别适用的。可以分别引入导带费米能级和价带费米能级。

$$n_0 + \delta n = n_0 \exp\left[\frac{E_{Fn} - E_F}{kT}\right]$$

$$p_0 + \delta p = p_0 \exp\left[\frac{E_{Fp} - E_F}{kT}\right]$$



我们从右图中可以看出。这是一块N型半导体，在注入状态下，电子和空穴浓度都有上升。因为出现了过剩电子和过剩空穴。所以 E_{Fn} 上升， E_{Fp} 下降。电子的浓度变化不明显，所以准费米能级 E_{Fn} 的上升。而空穴浓度变化较大，所以 E_{Fp} 下降。

5. 过剩载流子的寿命

过剩载流子的复合率在半导体的重要参数，在后面的章节中可以看到它们会影响到器件的更多特性。

我们先用准平衡。复合率 $R_p = \frac{p_0}{\tau_p}$ 或 $R_p = \frac{n_0}{\tau_n}$ 。所以平均载流子的寿命也是重要参数。

理想半导体可以用简单的周期性势阱推导，通过满足一维龙尼龙模型。我们推导出禁带和价带的空穴同时失乐园。但是半导体存在缺陷。那么就不能用周期性势阱简化模型。那么在实际的半导体材料中，以深能级缺陷不大。则会在禁带中也产生分立电子能态。这些能态则影响着平均载流子的寿命。

5.1. 肖克莱-里德-霍尔复合理论

禁带中一个允许的能量状态（也称为陷阱）充当了复合中心的任务，它俘获电子和空穴的概率是相同的。这种相等意味着它对电子和空穴的捕获截面相等。我们首先假设这个陷阱是中性的。并且陷阱被电子占有的概率由费米-狄拉克函数。

$$f_F(E_t) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{E_t - E_F}{kT}\right]}$$

这个陷阱一共有四种基本过程：

1) 电子的俘获：它是指导带中的电子被最初的中性陷阱俘获。那么陷阱此时带负电。在这个材料中

$$T + C = v_1 - \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{E_c - E_f}{kT}\right]}$$

这个阱中一共有四种基本过程：

1) 电子的俘获：这是指半导体中电子被取阱中的中性杂质俘获。那么陷阱此时带负电。在这个过程中，半导体中的电子被陷阱俘获的几率与空陷阱的深度成正比。则电子的俘获率为单位时间内半导体中的电子被俘获的个数。

$$R_{cn} = C_n N_t (1 - f_F(E_t)) n$$

其中， R_{cn} 为俘获率（#/cm²-s）， C_n 为电子俘获截面比例系数， N_t 为陷阱中心浓度， n 为半导体电子浓度。

2) 电子的发射：所有电子回到导带。那么有：

$$R_{en} = E_n N_t f_F(E_t)$$

R_{en} 为发射率， E_n 是比例系数。发射率和占有电子的陷阱密度成正比。

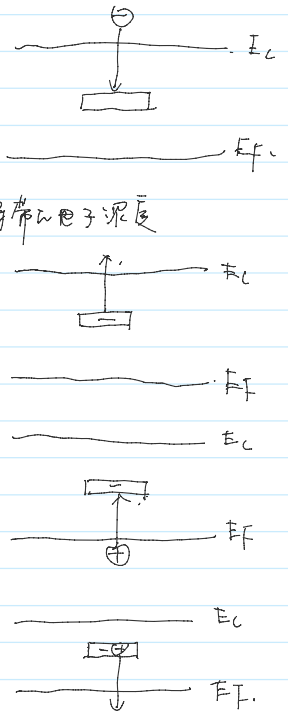
3) 空穴的俘获：价带中的空穴被包含电子的陷阱俘获。我们也可以认为是陷阱中的电子被发射到了价带。我们可以用同样一种符号表示。

$$R_{cp} = C_p N_t f_F(E_t) p$$

注意：这里和电子的俘获不同，是含有电子的陷阱才能俘获空穴。

4) 空穴的发射：空穴回到价带。

$$R_{ep} = E_p N_t (1 - f_F(E_t))$$



现在我们来讨论他们对载流子浓度的影响：

在热平衡状态下，半导体中电子被俘获的几率和被发射回导带的几率相等。或者说数同相等。即发射率 = 俘获率。

$$R_{en} = R_{cn}$$

$$E_n N_t f_{F0}(E_t) = C_n \cdot N_t (1 - f_{F0}(E_t)) \cdot n_0$$

我们对费米-狄拉克分布律用玻尔兹曼近似。近似为 N_t 。

$$E_n \exp\left[-\frac{(E_t - E_f)}{kT}\right] = C_n \cdot \left(1 - \exp\left[-\frac{(E_t - E_f)}{kT}\right]\right) \left(\exp\left[-\frac{(E_c - E_f)}{kT}\right]\right) N_c$$

$$\Rightarrow E_n = C_n \left[1 - \exp\left(-\frac{(E_t - E_f)}{kT}\right)\right] \cdot \left[\exp\left(-\frac{1}{kT} (E_c + E_f + E_t - E_f)\right)\right] N_c$$

因为假设 $E_t - E_f \gg kT$ ，所以 $1 - \exp\left(-\frac{(E_t - E_f)}{kT}\right)$ 趋近于 1。

我们可以得到 E_n 和 C_n 的关系

$$E_n = n' C_n, \text{ 其中 } n' = N_c \exp\left[-\frac{(E_c - E_t)}{kT}\right]$$

如果 E_t 与费米能级相同，则 $f_F(E_t) = \frac{1}{2}$ ，所以 n' 和半导体中的电子浓度相等。

由于非平衡状态中存在过剩载流子，因此半导体中俘获的净捕获率

$$R_n = R_{cn} - R_{en}$$

如果有这个公式就说明过剩载流子的复合被陷阱完全取满了。代入理论的正确式

$$R_n = C_n N_t (1 - f_F(E_t)) n - E_n N_t f_F(E_t)$$

从发射率和俘获系数的公式 $E_n = n' C_n$ 可得

$$R_n = C_n N_t [n(1 - f_F(E_t)) - n' f_F(E_t)]$$

那么对于空穴也是同理

$$R_p = C_p N_t [p f_F(E_t) - p' (1 - f_F(E_t))], \text{ 其中 } p' = N_v \exp\left[-\frac{(E_t - E_v)}{kT}\right]$$

我们可以发现， $n' p' = n_i^2$ ，因为 E_t 也符合 F-D 分布。

同时，若半导体中陷阱深度不是特别大，那么过剩电子和空穴的浓度相等。且复合率相同，因为我们认为这是准中性状态，所以 $R_n = R_p$ 。代入上面两式

$$R_n = R_p = \frac{C_n C_p N_t (np - n_i^2)}{C_n (n + n') + C_p (p + p')} = R$$

在热平衡时，无过剩载流子，所以 $R_n = R_p = 0$ 。 $np - n_i^2 = 0$ 也证明了理论的正确性。由于 R 是复合率，那么

$$R = \frac{g_n}{2}$$

5.2. 非平衡掺杂和小注入的条件

上两式即为同样材料很薄，而非指向在小注入条件下有近似操作。
对于小注入的几种半导体，有：

$$n_0 \gg p_0, n_0 \gg S_p, n_0 \gg n', n_0 \gg p', \text{ 我们假设陷阱俘获平衡中，以取 } n' \text{ 和 } p' \text{ 和俘获平衡浓度}$$

相反， $n_0 \gg n_i$ ，这和很窄的耗尽层。

$$R = \frac{C_n C_p N_t (n_0 - n_i^2)}{C_n (n_0 + n') + C_p (p_0 + p')} = \frac{C_p N_t}{n} \cdot (n_0 + S_p) / (p_0 + S_p) \approx \frac{C_p N_t}{n} \cdot n_0 S_p \approx C_p N_t S_p$$

所以n型半导体的复合率是掺杂浓度的函数，而Cp与少数载流子的俘获截面有关，所以在双极输运参数归纳为少数载流子寿命，复合率也变为少数载流子寿命。这是理论推导的结果。

我们假设掺杂为少数寿命代入方程。

$$R = \frac{S_p}{\tau_p} = C_p N_t S_p \equiv \frac{S_p}{\tau_{p0}}$$

其中，

$$\tau_{p0} = \frac{1}{C_p N_t}$$

陷阱浓度增加，捕获变大，复合率加快，从而寿命变短。 $\tau_{p0} = \frac{1}{C_p N_t}$ ，可以看出陷阱浓度是不合理的。因为这两个参数都是材料固有的参数。非平衡材料的小注入过程载流子的寿命可以理解为少数载流子寿命。

如果将 $\tau_{p0} = \frac{1}{C_p N_t}$, $\tau_{n0} = \frac{1}{C_n N_t}$ 代入 R, R1.

$$R = \frac{S_p}{\tau_{p0}(n_0 + n') + \tau_{n0}(p_0 + p')}$$

我们假设半导体为本征半导体。那么 $n_0 = n_i + S_p$, $p_0 = p_i + S_p$.

那么

$$R = \frac{2n_i S_n + (S_n)^2}{(2n_i + S_n)(\tau_{p0} + \tau_{n0})}$$

若 $S_n \ll 2n_i$, 则 $\beta = \frac{S_n}{2}$, $\tau = \tau_{p0} + \tau_{n0}$.

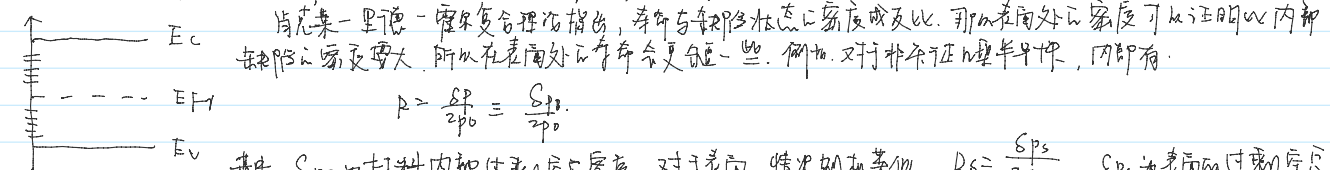
随着半导体从本征变为非本征， τ 即有效寿命(增加)。直观上可以理解为复合的多数变少了。

6. 表面效应。

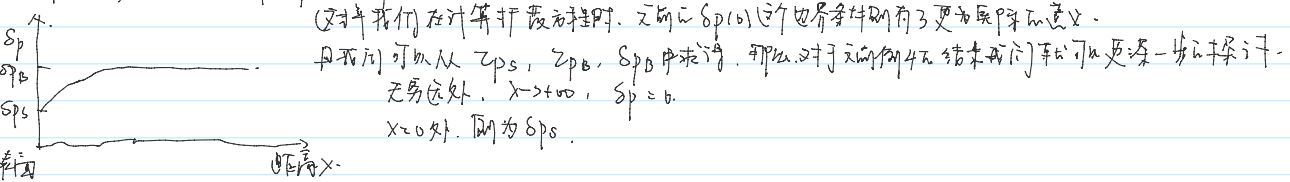
在之前的所有讨论中，我们都假设了半导体是无限的。那么这种假设的附加是不用考虑半导体的边界条件。然而，在实际过程中，材料并不是无限大的，因此存在半导体与邻近介质之间的接触表面。

6.1 表面效应。

前文讲了，周期性势场被破坏会导致禁带中出现能级状态，我们讨论了单一缺陷的分立能级。 $\tau_{n0} = \frac{1}{C_n N_t}$ 当然是在n型半导体中，而表面缺陷中产生的分立能级会比缺陷更多。如图。



其中， S_{ps} 为材料内部(假设)复合系数。对于表面，情况则和类似。 $R_s = \frac{S_{ps}}{\tau_{ps}}$ 。 S_{ps} 为表面的过剩空穴密度。如果假设整个半导体材料的产生率相同，那么在稳态时产生率=复合率。而 $\tau_{ps} < \tau_{pb}$ ，则 $S_{ps} < S_{pb}$ 。表面浓度比内部浓度少。即 $S_{ps} < S_{pb}$ 。如图。



6.2. 表面复合速度。

表面和内部的浓度不同，自然会有浓度差，那么内部就会向表面扩散，我们可以用以下方程描述。

$$-D_p \left[n \cdot \frac{d(S_p)}{dx} \right] \Big|_{\text{surface}} = S \cdot S_p \cdot \text{surface}$$

S 是一个比例系数，前与面积同，后为半导体的，方向为 x ，而 $\frac{d(S_p)}{dx}$ 为正，所以 S 也为正值。

若对 S 进行量纲分析，那么 S 是速度的单位为 cm/s 。那么 S 和可以称为表面复合速度。

s 是一个比例系数、有量纲的， ρ 为半无限层，方向为 x ，而 $\frac{d(\rho p)}{dx}$ 为正，所以 s 也为正值。
 若对 s 进行量纲分析，那么 s 是速度的单位为 cm/s 。那么 s 和 s_p 可以称为表面反应速度。
 对于无电势有恒定生成率的通解。

$$\rho p(x) = g' z_{p0} + A e^{x/L_p} + B e^{-x/L_p} \quad L_p = \sqrt{D_p z_{p0}}$$

我们把表面边界方程稍微变换一下， $\rho = -1$ 。

$$D_p \cdot \frac{d(\rho p)}{dx} \Big|_{\text{surface}} = s \cdot \rho p \Big|_{\text{surface}}$$

由于 $x=0$ 处为边界，则 $A=0$ 。那么 $\rho p(x) = g' z_{p0} + B e^{-x/L_p}$ ， $\rho p(0) = g' z_{p0} + B$ 。
 那我们把代入表面边界方程。

$$D_p \frac{d(\rho p)}{dx} \Big|_{\text{surface}} = -\frac{B}{L_p} = s \cdot \rho p \quad \Rightarrow B = \frac{-s g' z_{p0}}{(D_p/L_p) + s}$$

这个大概的思路是让通解满足4种边界条件。

$$\rho p = g' z_{p0} \left(1 - \frac{s L_p e^{-x/L_p}}{D_p + s L_p} \right)$$

在 $s=0$ 时，说明无反应，则内部过剩载流子和表面相同，在 $s \rightarrow \infty$ 时，分布则随 x 如
 例如 $g' z_{p0} = 10^{14} \text{cm}^{-3}$ ， $D_p = 10 \text{cm}^2/\text{s}$ ， $L_p = 31.6 \mu\text{m}$ 和 $\rho p(0) = 10^{13} \text{cm}^{-3}$ 。
 那么

$$\rho p(0) = g' z_{p0} \left(1 - \frac{s L_p}{D_p + s L_p} \right)$$

$$\rho p(0) = g' z_{p0} - g' z_{p0} \cdot s / \frac{D_p}{L_p} + s$$

$$s = \frac{D_p}{L_p} \left(\frac{g' z_{p0}}{\rho p(0)} - 1 \right) = 2.85 \times 10^4 \text{cm/s}$$

这与内部 10^{14}cm^{-3} 和表面 10^{13}cm^{-3} 的浓度相比，下降速度还快。若 $x = L_p$ 。
 那么浓度会下降 $\frac{1}{e}$ ，影响还是很大的。
 从图中我们也可以看到，器件的性能很大程度上取决于载流子的寿命。