

之前我们具有了一定的量子力学和固体物理的基础。而我们要研究的半导体具有了不同的特性。由于费米-狄拉克函数已经描述电子在平衡时的状态，所以这里只能研究平衡时的半导体。这也是整个半导体物理学的起点。只有达到平衡条件下的状态，才能确定出现偏压时的特性。例如，半导体有外加电压的情况。

我们首先研究本征半导体，然后加入杂质原子，通过控制掺杂原子的数量就可以改变半导体的导电特性。掺杂原子的类型决定了空穴和电子，从而改变分布。

1. 半导体中载流子

半导体的载流子是导带中的电子和价带中的空穴。所以它们的浓度是一个重要的参数。我们之前在讨论费米-狄拉克函数时已经提到单位体积中的电子数目和是量子态的密度和分布函数的乘积。这里将进行严格的数学推导，路修好了！该通车了！

1.1. 电子和空穴的平衡分布

数学的作用之一就是要定量描述。之前我们成功地写出了F-D分布描述了量子状态密度和电子密度的关系。F-D由热力学、统计学直接推出。所以这是一个可靠的理论。和物理规律一样可靠。但是，再可靠的分布也要经过实验检验。在半导体，他通过3！

导带中我们研究的电子数目。

$$n(E) = g_c(E) f_F(E)$$

$n(E)$ 是单位体积，单位能量的电子数目。我们当然希望的是整个导带的电子密度。所以对导带的能量范围积分，就可以得到总的电子浓度。

价带中在介绍空穴中曾提到过，若无外力作用下，或者关于k空间为偶函数外力下，在价带中，我们只需要考虑空穴，即量子态若被电子占有的概率。

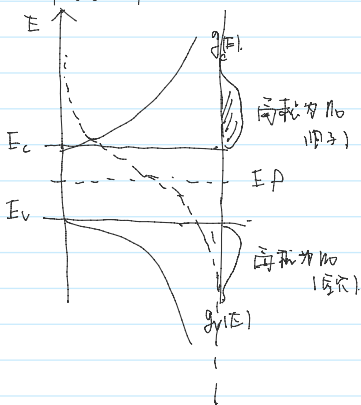
$$p(E) = g_v(E) [1 - f_F(E)]$$

这里又要再次提一提额外话，若 $T=0K$ ，则从所有的电子都在价带上，我们只要的半导体尺寸，就可以知道有多少价电子了？那我们就为什么从这个思路来计算呢？这样明显方便的多。

这确实是有的还是有的问题，有时使我们为了学习更多的知识愿意舍弃更多的知识。例如，我们为了学习半导体回顾了量子力学和统计学的知识，所以会有这么小的问题。我们已知的理论和经过理论推导和实验验证的。而我们已经的价带，关于价带，关于价带分布尚没有介绍，却有一套完整和精确的理论。所以不存在怎么算的问题。我们并没有完整推导下-D分布，所以有能不能用，并不符合热力学正常的。这就是起半的代价，结论当然是相信的，相信的半，并不有其他的期望!!!

继续，

本征半导体是不含有杂质的半导体。我们知道费米能级处于价带和导带之间的禁带中。以价带能级为参考和能级差为 E_c 。且在无外力作用下，根据平衡理论，空穴和电子进入导带产生的， $T=0K$ 是成对的，大概画一下



4.1.2. 分布函数方程

先算导带

$$n(E) = g_c(E) f_F(E)$$

设 $E - E_F \gg kT$ ，则F-D分布可以近似成麦克斯韦-玻尔兹曼分布。

$$f_F(E) = \frac{1}{1 + \exp(E - E_F / kT)} \approx \exp[-(E - E_F) / kT]$$

量子态密度为

$$g_c(E) = \frac{4\pi(2m_n^*)^{3/2}}{h^3} \cdot \sqrt{E - E_c}$$

则

$$n(E) = \int_{E_c}^{\infty} \frac{4\pi(2m_n^*)^{3/2}}{h^3} \sqrt{E - E_c} \cdot \exp[-(E - E_F) / kT] dE$$

这里上极限可以写为无穷大因为 $f_F(E)$ 很快趋近于0。画图。

我们希望用积分的结果来计算上式，这里用Gamma函数可行。

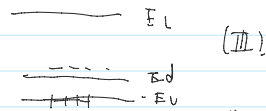
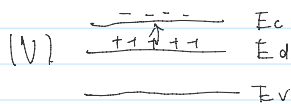
$$\int_0^{\infty} \eta^{1/2} \exp(-\eta) d\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

设 $\eta = \frac{E - E_c}{kT} \Rightarrow E = E_c + kT\eta \quad dE = kT d\eta$ 。积分下限 $\frac{E_c - E_c}{kT} = 0$ ，上限 $\frac{\infty - E_c}{kT} = \infty$ 。

则

$$\int_0^{\infty} \frac{4\pi(2m_n^*)^{3/2}}{h^3} \cdot \sqrt{kT\eta} \cdot \exp[-(E_c - E_F + kT\eta) / kT] \cdot kT d\eta = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^* kT)^{3/2} \exp[-(E_c - E_F) / kT] \int_0^{\infty} \eta^{1/2} \exp(-\eta) d\eta$$

在硅中掺杂V族元素。例如P，则会有一个施主原子，



E_d 就是施主能级。在中原子原子中指向用薛定谔方程的薛定谔方程描述了一下。下面会来讨论。施主原子比其他杂质原子电子更密集地分布在导带，所以处于导带和价带之中，即禁带。当然，这里指的是杂质原子在禁带。对于掺杂的原子，由于位置不同，能带分布是不同的。这里原子受到掺杂原子的束缚，所以可以在禁带之中。

P原子在这里提供了电子，称为施主杂质原子。

同理，掺入III价元素，如B原子，则会提供空穴。由于掺杂V族元素不同，V族中共价键是饱和的，电子能量更趋近于导带，而III族元素，有更强的吸引力，所以会趋近于价带，大概可以这么理解！

这里B原子接受电子，称为受主杂质原子。

产生施主原子称为N型(Negative)半导体，受主则为P型(Positive)

2.2. 中子能。

假设施主原子进入导带所需的能量，即为中子能。我们前面介绍固体中电子能级时介绍过金属，进入导带后可以认为是自由电子。所以中子能可以看成是施主杂质原子的电子所在能级能量 E 。

之前我们用薛定谔方程近似描述电子原子的能量，在当时涉及到三维球坐标下的分部变量法，不好解，所以直接给的结果，我们用介电常数有效电荷来推导一下。

$$E = \frac{-m^* e^4}{2(n\hbar)^2 (4\pi\epsilon)^2}$$

而玻尔模型对氢原子是这样用的，他的理论主要根据对应原理，他提出原子力学在宏观近似下仍然成立。且经典力学已经被实验所检验，也是正确的。由此有了波尔模型，我们用波尔模型不仅能算出半径，也能算出能级。同样研究氢原子然后推广到施主杂质原子，波尔理论的适用范围在氢原子外就在于他的核心思想，对应原理。

下面来总结一下科伦的奇功。

首先，我们认为原子和离子间的库仑引力等于轨道电子的向心力。这是经典力学的结论。

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m_0 v^2}{r_n}$$

这里再说明一下，因为光电效应和普朗克的工作已经几乎已得到证实，所以加上他的对应原理，就会推导出角动量的量子化。很多人(包括圣经教材)认为这是一个假设，这其实是波尔对应原理下的必然推导结果。

$$m_0 v r_n = n\hbar$$

于是，得到 V 。

$$V = \frac{n\hbar}{m_0 r_n}$$

代入向心力公式

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m_0}{r_n} \cdot \frac{n^2 \hbar^2}{m_0^2 r_n^2}$$

解出 r_n

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_0 e^2}$$

于是我们得到了量子化的半径，代入角动量方程。

$$V = \frac{n\hbar}{m_0} \cdot \frac{m_0 e^2}{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}$$

当 $n=1$ 时，波尔将此时氢原子的半径称为波尔半径。

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_0 e^2} = 0.53 \text{ \AA}$$

现在我们将波尔的结论不加推导的推广到普遍情形， $m_0 \rightarrow m^*$ ， $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

$$\frac{r_n}{a_0} = n^2 \epsilon_r \left(\frac{m_0}{m^*} \right)$$

例如在硅中， $n=1$ 时的最低能量状态 $E_1 = 11.7 \text{ eV}$ ， $m^*/m_0 = 0.26$ 。于是，

$$\frac{r_1}{a_0} = 15 \rightarrow r_1 = 23.9 \text{ \AA}$$

这个半径大约是硅晶格常数的四倍。硅中的每个晶胞中含有八个原子，所以施主原子并未紧密束缚于施主原子。

轨道电子的能量为

$$E = T + V$$

其中 T 表示电子动能， V 表示电子势能。其中动能为 $T = \frac{1}{2} m^* v^2$

将 V 代入。

$$T = \frac{1}{2} m^* \cdot \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0 n\hbar)^2} = \frac{m^* e^4}{2(n\hbar)^2 (4\pi\epsilon)^2}$$

势能和是静电场的势能

$$T = \frac{1}{2} m^* \overline{v^2} = \frac{1}{2} (h\nu)^2 / (4\pi\epsilon)^2$$

动能和是静电场的势能

$$V = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon r_n} = \frac{-m^* e^4}{(h\nu)^2 (4\pi\epsilon)^2}$$

所以能量本为

$$E = T + V = \frac{-m^* e^4}{2(h\nu)^2 (4\pi\epsilon)^2}$$

在氢中，处于最低状态的能级是 $E = -13.6 \text{ eV}$ ，而硅中为 $E = -2.8 \text{ meV}$ (当然不是最低能级状态)。这一数值远小于禁带宽度。

那么对于非本征半导体，我们大概可以从能级分布图来看。毕竟这是一个中子原子核模型，如果相互作用也多，则抹平的误差一定会比较大。但实验和理论都证明能级分布是差不多的。

杂质	杂质	Si 的能级 (eV)
施主	硼	0.045
	砷	0.05
受主	硼	0.045
	镉	0.06

这里要说明，中子能级能级为 E ，因为讨论的对象是中子，中子需要吸收能量 E ，中子能级取绝对值为 $-E$ 。

2.3 II-V 族半导体

在介绍 k 空间时，曾经给出了硅和砷化镓的 $E-k$ 关系图。从图中我们可以看出，GaAs 的价带顶与导带顶在 $k=0$ 处，称为直接半导体，如果电子从价带顶入导带，会吸收能量，所以可以做光电器件。Si 从价带顶到导带顶的转移不仅会吸收能量， k 值也会发生变化，也和电子的动量会发生改变，称为间接半导体。另外当然我们都知道。

以 GaAs 为代表的 III-V 族半导体。注意，砷 As 是 V 族元素，镓 Ga 是 III 族元素。

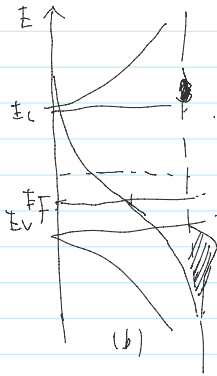
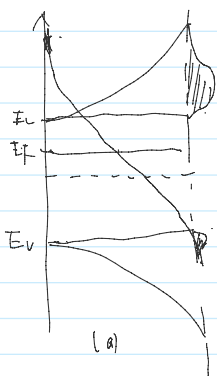
那么 III 族元素和 V 族元素是受主杂质原子，VI 族元素则是施主杂质原子。而 IV 族元素则因代换是 III 或 V 族原子表现出不同的特性，称为两性杂质。若在中性杂质中掺杂 Si，则 Si 主要会表现出施主杂质，而掺杂 Ge，主要会表现出受主杂质。

3. 非本征半导体

非本征半导体有一种载流子占主导地位作用，电子或空穴，从而改变价带或导带中载流子的浓度，我们知道半导体材料中服从 $n-p$ 分布，那么非本征的结果就是费米能级的变化。

3.1 电子和空穴的统计状态分布

之前在非本征半导体中，费米能级的位置取决于电子和空穴的相对质量，考虑载流子的浓度图。



当掺入施主杂质时，导带的电子浓度会多于价带中的空穴浓度，所以对应于图 (a) 即费米能级高于禁带的中心位置。

当掺入受主杂质时，价带的空穴浓度会多于导带中的电子浓度，所以对应于图 (b)，即费米能级低于禁带的中心位置。

前面根据玻尔兹曼统计得到了 n_0 和 p_0 的一般表达式

$$n_0 = N_c \exp \left[-\frac{(E_c - E_F)}{kT} \right]$$

$$p_0 = N_v \exp \left[-\frac{(E_F - E_v)}{kT} \right]$$

为了和非本征半导体相联系，我们推导出热平衡状态下电子浓度和空穴浓度的另外一种表达式。

设本征费米能级为 E_i 。

$$E_{Fi} = \frac{1}{2} (E_c + E_v) + \frac{3}{4kT} \ln \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right) \quad \text{其中费米能级密度为 } N = 2 \left(\frac{2\pi m^* kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

再引入他自然最恰当的方法根据玻尔兹曼统计 $n = N_c \exp \left[-\frac{(E_c - E_F)}{kT} \right]$ 和 $p = N_v \exp \left[-\frac{(E_F - E_v)}{kT} \right]$ ，这里选择 n 。

$$n_0 = N_c \exp \left[-\frac{(E_c - E_F + E_{Fi} - E_{Fi})}{kT} \right]$$

$$= N_c \exp \left[-\frac{(E_c - E_{Fi})}{kT} \right] \exp \left[-\frac{(E_{Fi} - E_F)}{kT} \right]$$

$$n_0 = n_i \exp \left[-\frac{(E_{Fi} - E_F)}{kT} \right] \quad \text{其中 } n_i \text{ 是本征半导体的电子浓度。}$$

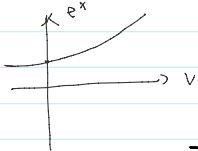
同理可得

$$p_0 = p_i \exp \left[-\frac{(E_F - E_{Fi})}{kT} \right] \quad \text{其中 } p_i \text{ 是本征半导体的空穴浓度。}$$

因此我们可以清楚地看到费米能级是怎么影响载流子浓度的。

$n \propto e^x$ / 可以看出，当 $E_F > E_{Fi}$ 时， $n_0 > p_0$

图也可以清楚地看到费米能级是如何影响载流子浓度的。



可以看出，当 $E_F > E_{Fi}$ 时， $n_0 > p_0$
 当 $E_F < E_{Fi}$ 时， $n_0 < p_0$ 。

2.2 n_0 和 p_0 的乘积

在本征半导体中，通过一般通用公式可以得到

$$n_i = N_c N_v \exp\left[-\frac{E_g}{kT}\right]$$

而这里则可以改写为

$$p_0 n_0 = N_c N_v \exp\left[-\frac{E_g}{kT}\right]$$

这里要如何理解浓度的乘积呢？

N_c 和 N_v 都是从 G_c 和 G_v 变形而来，而载流子浓度则是从 k 空间的推求。其中蕴含着一定的统计变换的关系。所以 $n_0 p_0$ 的浓度积是 k 空间和乘积的结果。同时也是在坐标系下相加的结果。换句话说，这也是量子力学任意一个必然结果。这个结论看似很简单，但却十分重要。

但是需要记住的是， n_0 和 p_0 的乘积结果和载流子浓度的联系是建立在将 k -D 分布近似为玻尔兹曼分布的前提下。若 $E - E_F$ 不能远大于 kT ，则这个结论是不成立的。

严格来说，非本征半导体中并不存在本征载流子浓度，但是，我们仍然可以将它作为一个重要参数。

3.3 费米狄拉克积分

下面讨论一下玻尔兹曼近似者不成立的情况下，如何求费米能级很可能跑到导带中或者价带中。科学毕竟是需要严谨的。

$$n_0 = \int_{E_c}^{\infty} G_c(E) f_F(E) dE \quad \left| \quad p_0 = \int_{-\infty}^{E_v} G_v(E) [1 - f_F(E)] dE \right.$$

$$= \int_{E_c}^{\infty} \frac{4\pi (2m_n^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \sqrt{E - E_c} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{E - E_F}{kT}\right]} dE \quad \left| \quad = \int_{-\infty}^{E_v} \frac{4\pi (2m_p^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \sqrt{E_v - E} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{E - E_F}{kT}\right]} dE \right.$$

先将指数移到积分外面。

$$= \frac{4\pi (2m_n^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_{E_c}^{\infty} \frac{\sqrt{E - E_c}}{1 + \exp\left[\frac{E - E_F}{kT}\right]} dE \quad \left| \quad = \frac{4\pi (2m_p^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_{-\infty}^{E_v} \frac{\sqrt{E_v - E}}{1 + \exp\left[\frac{E - E_F}{kT}\right]} dE \right.$$

如何得到有效状态密度，以及同样变量代换

$$\eta = \frac{E - E_c}{kT} \quad dE = kT d\eta \quad \left| \quad \eta' = \frac{E_v - E}{kT} \quad dE = -kT d\eta' \right.$$

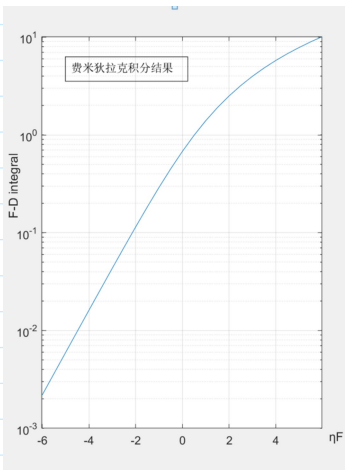
换元积分法

$$\frac{4\pi (2m_n^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{kT^{\frac{3}{2}} \sqrt{\eta} d\eta}{1 + \exp(\eta - \eta_F)} \quad \left| \quad \frac{4\pi (2m_p^*)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \int_0^{\infty} \frac{-kT^{\frac{3}{2}} \sqrt{\eta'} d\eta'}{1 + \exp(\eta' - \eta'_F)} \right. \quad \eta'_F = \frac{E_v - E_F}{kT}$$

那么，可以定义上面的积分为费米-狄拉克积分。

$$F_n(\eta_F) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\eta}}{1 + \exp(\eta - \eta_F)} d\eta$$

这个积分目前积不出来，只能通过图表来求解，如图所示。



如果 $\eta'_F(\eta'_F) \gg 0$ ，则费米能级落在价带中。同理若 $\eta'_F < 0$ ，则落在价带中。

3.4 简并与非简并半导体

我们在讨论半导体中加入杂质时，其实暗含了如下假设：

假设掺杂的杂质原子浓度与本体半导体相比是很小的。如果杂质原子在半导体中扩散的速率很快，他们之间的相互作用，能级就不会分裂。这种半导体称为非简并半导体。

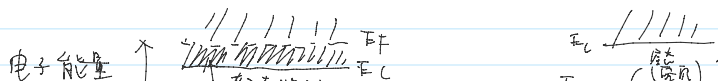
若浓度增加，则杂质原子间距逐渐减小，将达到施主电子开始相互作用之间的临界点。这时，能级开始分裂成能带，能级继续分裂，则有可能与导带底或价带顶相交叠。这种情况发生在杂质在导带或价带中，杂质有效状态密度可以和本体浓度相比较时，就会产生交叠。当杂质有效状态密度大于杂质浓度时，根据

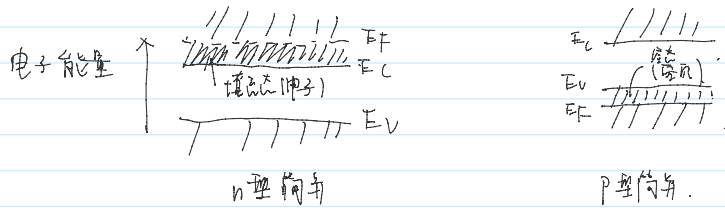
$$n_0 = N_c \exp\left[\frac{E_c - E_F}{kT}\right] \quad p_0 = N_v \exp\left[\frac{E_F - E_v}{kT}\right]$$

$$\text{其中 } N_c = 2 \cdot \left(\frac{2\pi m_n^* kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad N_v = 2 \cdot \left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

若 $n_0 > N_c$ 或 $p_0 > N_v$ ，则 $E_c - E_F < 0$ ， $E_F - E_v < 0$ 。

费米能级会进入导带或者价带内。这时就不能用玻尔兹曼分布分析了。高中用 k -D。





4. 施主和受主的统计分布

量子力学是一门统计学，我们这里运用统计学的方法讨论施主和受主的状况。

4.1 掺杂分布函数

假设有一个价电子和两个施主，对应的能级。

对于施主能级来说，有两个量子态，即自旋的方向。且根据泡利原理，每个施主原子，所以只有一个电子会被占据。那么根据分布函数在温度 T-D 分布。因为不再考虑电子相互作用。

在掺杂分布的推导中， $\frac{p(E_c)}{p(E_v)}$ 中， $p(E_c)$ 的根号变为 $\frac{1}{2}$ ，因为量子态只有一个被占据。

所以 $\frac{nd}{Nd} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp[(E_d - E_f)/kT]}$ 其中 nd 是施主原子浓度， Nd 为施主原子浓度。
 $\frac{1}{2}$ 也称为 $\frac{1}{g}$ ， g 为简并因子，简并度和上节所述一样， g 为简并度。
 那么 $nd + Nd^+ = Nd$ ，其中 Nd^+ 是电离施主原子浓度。

对于受主原子进行相似分析。

$$\frac{p_n}{N_a} = 1 + \frac{1}{g} \exp[-(E_d - E_f)/kT], \quad N_a^- + p_n = N_a$$

对于空穴和价电子，受主能级的简并因子通常取 4。

对于施主，若掺杂 B，则为 $n=2, l=0, m=0, s=\pm 1/2$ ，所以 g 为 2。

对于受主，若掺杂 P 或 Si， $l=1, m=0$ ，所以 $g=4$ 。由于在元素周期表中以半导体的 $n=2$ ，所以这里不过多描述。

4.2 完全电离平衡统计

假设 $E_d \gg E_f$ ，即电子数相对较少时，可以用玻尔兹曼分布。

$$nd \approx \frac{Nd}{2} \exp[-(E_d - E_f)/kT] = 2Nd \exp[-(E_d - E_f)/kT]$$

由于这里是价带半导体， E_f 靠近 E_v 也可以用玻尔兹曼分布。

$$n_0 = N_c \exp[-(E_c - E_f)/kT]$$

我们想求过施主能级的相对电子数，即

$$\frac{nd}{n_0 + n_0} = \frac{2Nd \exp[-(E_d - E_f)/kT]}{2Nd \exp[-(E_d - E_f)/kT] + N_c \exp[-(E_c - E_f)/kT]}$$

约去分子

$$\frac{nd}{n_0 + n_0} = \frac{1}{1 + \frac{N_c}{2Nd} \exp[-(E_c - E_f) - (E_d - E_f)]/kT]} = \frac{1}{1 + \frac{N_c}{2Nd} \exp[-(E_c - E_d)/kT]}$$

而 $E_c - E_d$ 就是电离能。

在室温状态下，这个值约为 0.4%，非常小，绝大多数都已经电离，称为完全电离状态，这种状态称为完全电离状态。

在受主原子中同样也是。

在 $T=0K$ 时，电子最低能态，不发生电离， $E_d < E_f$ 。

由于是简并状态， $E_f < E_c, E_f > E_v$ ，所以，费米能级 E_f 靠近 $E_d < E_f < E_c$ 或 $E_a > E_f > E_c$ 。

电子把这里的原因省略了，不知什么原因。这时的状态称为杂质态，直接沿用量子力学的概念。

5. 本征状态

在热平衡状态，半导体处于电中性状态，电子分布在不同的能级状态中，产生正负电荷，但净电荷密度为 0。

前面已经介绍到电子密度和空穴密度是掺杂浓度的函数，那么同时引入两种掺杂，就会形成本征半导体。

5.1 补偿半导体

当 $N_d > N_a$ 时，形成了 n 型补偿半导体。

当 $N_d = N_a$ 时，形成完全补偿半导体。

当 $N_d < N_a$ 时，形成了 p 型补偿半导体。那么电子和空穴个数相同，所以有了本征半导体的特性。在后面会看到，补偿半导体的结果是必然的。

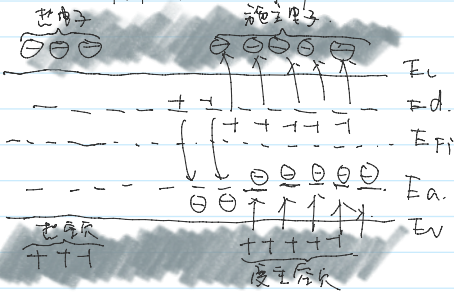
5.2 平衡电子和空穴浓度

先画出补偿半导体的能带示意图。

与掺杂浓度成正比。

5.2. 本征电子和空穴浓度

画出补偿半导体的能带示意图。



这些电子不参与导电。

那么由中性的条件。

$$n_0 + Na^- = p_0 + Nd^+$$

$$n_0 + (Na - pa) = p_0 + Nd - nd$$

(这样式中的 n_0, pa, p_0, nd 我们初得到了价带的损失分布)

若认为是在完全电离的条件下 (室温下通常就可) 则 nd 和 pd 等于零

$$n_0 + Na = p_0 + Nd$$

此外, 根据 $n_0 \cdot p_0 = n_i^2$ 求取 $n_0 p_0 = n_i^2 \Rightarrow p_0 = \frac{n_i^2}{n_0}$

$$n_0 + Na = \frac{n_i^2}{n_0} + Nd$$

$$n_0^2 - (Nd - Na)n_0 - n_i^2 = 0$$

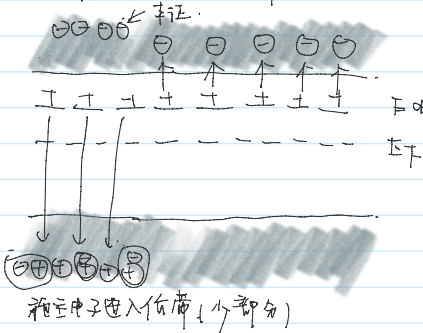
解一下这个方程

$$n_0 = \frac{(Nd - Na) \pm \sqrt{(Nd - Na)^2 + 4n_i^2}}{2} = \frac{Nd - Na}{2} + \sqrt{\left(\frac{Nd - Na}{2}\right)^2 + n_i^2}$$

取正号因为浓度不能为负, 本征条件下, $Nd - Na = 0, n_0 = n_i$

根据图中所示, 仅当 $Nd > Na$ 时, 式子才有意义, 所以只能用于 n 型和完全补偿半导体, 随着施主原子的加入, 半导体中的电子浓度增加并超过了本征载流子浓度, 同时, 价带中的空穴浓度将低于本征载流子浓度, 而且, 随着施主原子的加入, 中子也会有效能量, 状态中重新分布, 少部分施主原子与本征空穴复合, 所以少数载流子浓度的浓度降低了, 而且半导体的电子浓度也不等于施主浓度。

加上本征电子浓度, 即 $n_0 \neq n_i + Nd$ (即使完全电离)



这是一个例题, 计算给定掺杂浓度条件下, 室温条件下本征半导体的电子浓度和空穴浓度

做次下 $300K$, 砷化镓的掺杂浓度为 $Nd = 5 \times 10^{13} cm^{-3}$, $Na = 0$, 本征载流子浓度为 $n_i = 2.4 \times 10^{11} cm^{-3}$

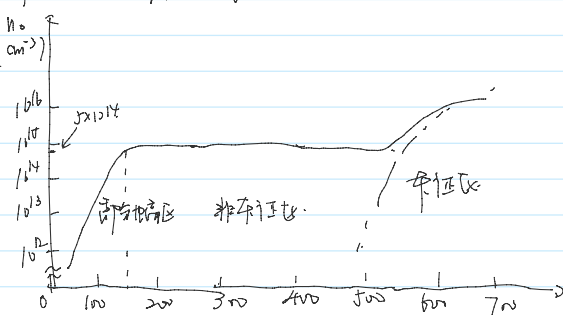
代入公式

$$n_0 = \frac{Nd}{2} + \sqrt{\left(\frac{Nd}{2}\right)^2 + n_i^2} < Nd + n_i = 5.77 \times 10^{13} cm^{-3}$$

$$p_0 = \frac{n_i^2}{n_0} = 1.67 \times 10^{12} cm^{-3}$$

这里掺杂浓度和本征载流子浓度数量级差不多, 中子浓度和空穴浓度到本征载流子浓度的数量级

本征载流子浓度, $n_i^2 = Nc Nv \exp\left(-\frac{Eg}{kT}\right)$, 所以他是温度的函数, 当温度上升时, n_i 个, 所以本征半导体将占据主导地位, 最终半导体会变成非本征半导体, 因为掺杂浓度为 $5 \times 10^{14} cm^{-3}$ 的砷化镓中, 中子浓度与温度的关系, 随着温度增加, 本征浓度将占据主导地位。



这里计算一下, 掺杂浓度原子多于施主原子的情况, 同样假设完全电离。

$$n_0 + Na^- = p_0 + Nd^+$$

$$\Rightarrow n_0 + (Na - pa) = p_0 + (Nd - na)$$

$$\Rightarrow n_0 + Na = p_0 + Nd, \quad n_0 = \frac{n_i^2}{p_0}$$

$$\Rightarrow p_0^2 - (Na - Nd)p_0 - n_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{Na - Nd}{2} + \sqrt{\left(\frac{Na - Nd}{2}\right)^2 + n_i^2}$$

$$\rightarrow n_0 = \frac{n_i^2}{p_0}$$

6. 费米能级位置

前几章关于费米能级的位置已经讨论不少。

本征费米能级 $E_F = \frac{1}{2}(E_C + E_V) + \frac{3}{4}kT \ln \frac{N_V}{N_C}$

向非本征半导体中, 由于 $n_0 \neq p_0$, 所以不能求本征半导体一种求出费米能级位置。

$$n_0 = Nc \exp\left[-\frac{(E_C - E_F)}{kT}\right] \quad p_0 = Nv \exp\left[-\frac{(E_F - E_V)}{kT}\right]$$

$$\rightarrow n_0 = n_i \exp\left[-\frac{(E_{Fi} - E_F)}{kT}\right] \quad p_0 = n_i \exp\left[-\frac{(E_F - E_{Fi})}{kT}\right]$$

我们现在有了 n_0 和 p_0 的数学表达式, 所以我们可以求非本征半导体的费米能级位置。

6.1 数学推导

所以可以求出费米能级位置, 所以可以求出非本征半导体的费米能级位置。

我们现在有 n_0 和 p_0 的数学表达式，所以我们可以求出非本征半导体的费米能级位置。

4.1 数学推导

利用电中性条件和 $n_0 = n_i^2$ 这个与空穴的电荷条件。我们可以将 p_0 和 n_0 表达为已知的 N_d , N_a 和 n_i^2 。这样方程中将没有未知量，自然可以求解。

首先求出 $E_c - E_F$ 。

$$E_c - E_F = kT \ln \frac{N_c}{n_0}$$

考虑本征半导体中，处于非本征区，那么 $N_d \gg n_i$ ，根据 $n_0 = \frac{N_d - N_a}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_d - N_a}{2}\right)^2 + n_i^2}$ ，则 $n_0 \approx N_d - N_a$ 。

$$E_c - E_F = kT \ln \frac{N_c}{N_d - N_a}$$

所以，随着掺杂浓度的增加，费米能级向上移动。这和之前的本征能级的分布一致。这里当然讨论的是简并半导体。

我们还可以通过推导。

$$E_F - E_i = kT \ln \left(\frac{n_0}{n_i} \right)$$

n_0 由电中性公式给出， n_i 只与掺杂浓度有关。

4.2 费米能级和温度的关系

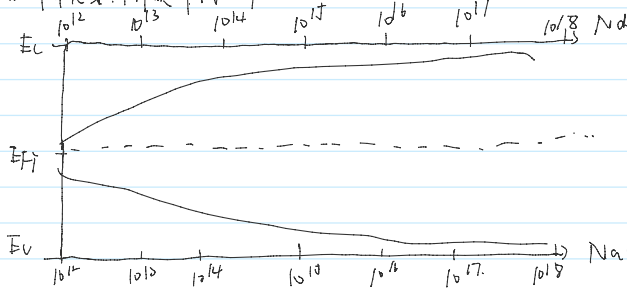
我们这里不研究 n_0 和 p_0 的表达式，而是研究 $E_c - E_F$ 或 $E_F - E_v$ 。

$$E_c - E_F = kT \ln \left(\frac{N_d}{N_c \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right)} \right) = N_d \cdot kT \ln \left[\frac{\exp\left(\frac{E_g}{2kT}\right)}{2 \left(\frac{2\pi m_e^* kT}{h^2}\right)^{3/2} \cdot 2 \left(\frac{2\pi m_h^* kT}{h^2}\right)^{3/2}} \right]^{1/2}$$

$$= N_d \cdot kT \ln \left[\frac{1}{2} \exp\left(\frac{E_g}{2kT}\right) \cdot \left(\frac{h^2}{2\pi kT}\right)^{-3/2} (m_e^* m_h^*)^{-3/4} \right]$$

我们主要研究的是和材料有关的掺杂浓度公式比较复杂，我们只需要计算一下大概的多项式阶数，图先举用即可。

所以大概只是关于 N_d 的 $-1/2$ 阶关系。所以举用如下。



如图所系，随着浓度增加，逐渐靠近。

我们再来讨论一下温度。

把指数取用泰勒公式展开一下。

$$\exp\left(\frac{E_g}{2kT}\right) \approx 1 + \frac{E_g}{2kT} + \frac{E_g^2}{4(kT)^2} \dots$$

所以 $N_c - N_F$ 基本和 kT 的 $N_c - N_F \sim (kT)^{3/2}$ 的关系。

最后的图型过于复杂，这里直接截图。

高温情况下，非本征特性开始消失， $E_F \rightarrow E_i$ 。

当温度很低时，出现量子态，不能假设为费米分布。同时，能级位于 E_d 之上或 E_a 之下。

因为温度如 kT 时，是费米能级状态，所以 $E_F > E_d$ 或 $E_F < E_a$ 。

6.3 费米能级的应用

在平衡状态下，费米能级会处于一个常数，这个意思不是费米能级不变了，而是当两种不同的半导体相连接后，会向无用的方向发展。最后达到平衡的最大值。那么此时两种材料将会有相同的费米能级。我们已经学习了接电，那么就简单讨论一下 P 型和 N 型。

