微分方程

2019年10月26日 12:55

讨论的方程都是能解出最高阶导数的方程，或已解出最高阶的方程。

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

若微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数和阶相同，则该解为通解。

1. 一阶微分方程的解法。 $y' = f(x, y)$，或 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

1) 可分离变量的微分方程。 $g(y)dy = f(x)dx$.

同时积分

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

$$G(y) = F(x) + C \leftarrow \text{隐式解.}$$

2) 齐次方程。 $$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

引入 $u = \frac{y}{x}$，则 $y = ux$ $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

带入原式

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi u$$

分离变量 $$\frac{du}{\varphi u - u} = \frac{dx}{x}$$

……

可化为齐次的方程。 $$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$ 当 $c_1 = c = 0$ 时为齐次。

非齐次的情形下，可以采用如下变换。

$$x = X + h \qquad y = Y + k$$

$$dx = dX \qquad dy = dY$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1} \Rightarrow \begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

若 $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - a_1 \cdot b \neq 0$ 则 $\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}$

若 $a \cdot b_1 - a_1 \cdot b = 0$，则 $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$，可令 $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}$$ 引入 $v = ax + by$ $\frac{dv}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$

则 $$\frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx} - a\right) = \frac{v + c}{\lambda v + c_1}$$ 可分离变量!!!

……

可以推广到 $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)!$$

3) 一阶线性微分方程。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$ 对于 y 和 $\frac{dy}{dx}$ 是一阶方程。

3) 一阶线性微分方程.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$ 对于 y 和 $\frac{dy}{dx}$ 是一阶方程.

先求齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + C_1$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$ ，其中 $C = \pm e^{C_1}$ ，← 齐次方程之通解.

$\boxed{\text{常数变易法}}$ $C = u(x)$.

$$y = ue^{-\int P(x)dx} \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = u'e^{-\int P(x)dx} - uP(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (2)$$

将 (1)，(2) 式代入 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

$$u'e^{-\int P(x)dx} - u P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)ue^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\Rightarrow \quad u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

将式代入 $y = ue^{-\int P(x)dx}$ ，即得到非齐次线性方程之通解.

解法之思路分析：采用分离变量法和齐次法是最简单的，所以需要简化方程.

中心思想：方程中不能同时出现 $P(x)y$，$Q(x)$，

1) 考虑消去 $P(x)y$ → $y(x) = \frac{y(x)v(x)}{v(x)}$ ← 增加变量 . 设 $\frac{y(x)}{v(x)} = u(x)$

$$\frac{dy}{dx} = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}.$$

∴ 原方程 可以变为

$$u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} + P(x)u(x)v(x) = Q(x)$$

$$v(x)\frac{du}{dx} + u(x)\left[\frac{dv}{dx} + P(x)v(x)\right] = Q(x)$$

这里 $\frac{dv}{dx} + P(x)v(x) = 0$ 则可以除去 $P(x)$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} + P(x)v(x) = 0 & \text{①} \\ \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)} & \text{②} \end{cases}$$

← 可以看成齐次解 第一步之目的.

①式可以解得 $v(x) = f(P(x))$

②式可以变为 $\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{f(P(x))}$

$$\rightarrow u(x) = \frac{1}{f(P(x))}\int Q(x)dx + C.$$

最后代回 $y(x) = u(x)v(x)$ ← 即解得

4) 伯努利方程.(Bernoulli)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

两边同时乘 y^{-n}.

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

两边同时乘 y^{-n}.

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

$y^{-n}=\frac{1}{1-n}d(y^{1-n})$ ，引入 $z=y^{1-n}$.

$\longrightarrow \frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

$\longrightarrow \frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$ ← 变为一阶线性微分方程，

2. 高阶微分方程.

降阶的方法来解决.

$$y''=f(x,y,y')$$

1) $y^{(n)}=f(x)$ ，连续积分

2) $y''=f(x,y')$ 设 $y'=p$.

$p'=f(x,p)$ ← 一阶. ， $P=\phi(x,C_1)$ $\quad y=\int\phi(x,C_1)dx+C_2$.

3) $y''=f(y,y')$ 不包含自变量 x.

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{\frac{dy}{y'}}=y'\frac{dy'}{dy}.$$

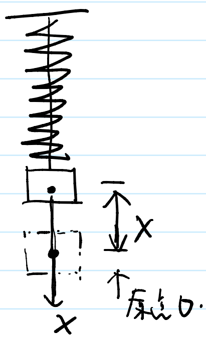
则 $y'\frac{dy'}{dy}=f(y,y')$

$y'=\phi(y,C_1)$ ← 并不是所有方程都有解.

$$\int_y\frac{1}{\phi(y,C_1)}dy=x+C_2.$$

4) 高阶线性微分方程.

主要举例：自由振动和强迫振动.



平衡时，拉力=重力.

若给一个沿x轴方向的初速度，则有 $x(t)$

弹簧 $f=-cx$.

阻尼 $R=-\mu\frac{dx}{dt}$.

由牛顿第二定律得. $f=ma$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx-\mu\frac{dx}{dt}.$$

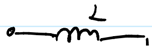
$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{c}{m}x-\frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt}$ 设 $2n=\frac{\mu}{m}$， $k^2=\frac{c}{m}$.

则 $\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0$ ← 自由振动

若物体还受到垂直干扰力. $F=H\sin pt$.

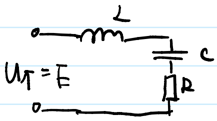
则 $\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=H\sin pt$. ← 强迫振动.

② 电路分析



$i=\frac{dq}{dt}$ $\quad u_c=\frac{q}{C}$ $\quad E_L=-L\frac{di}{dt}$ ， $q=Cu_c$

③ 电路分析



$i = \frac{dq}{dt}$ $u_c = \frac{q}{C}$ $E_L = -L\frac{di}{dt}$, $q = Cu_c$

$\therefore E - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} - Ri = 0$.

即 $LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E_m\sin\omega t$.

$\beta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 串联电路振荡方程.

二阶线性方程.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)$$

若 $f(x)=0$, 方程为齐次的.
若 $f(x)\neq 0$, 方程为非齐次的.

n阶线性方程.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

解的结构

齐次解 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

1) 若 y_1, y_2 是方程的两个解, 则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也是方程的解, 且 C_1, C_2 为任意常数.
证: 因为方程是线性的

$$f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0.$$

2) 线性相关和线性无关.
设 $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ 为定义在区间I上的n个函数. 若存在n个不全为零的常数 $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$, 使当 $x\in I$ 时恒等式成立.

$$k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n = 0$$

那么称这n个函数在区间I上线性相关. 否则线性无关.
对于两个函数, y_1, y_2.
$k_1y_1 + k_2y_2 = 0$ 若线性相关
则 $\frac{y_1}{y_2} = C$
若线性无关
则 y_1, y_2 的比不为常数.

3) 若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程的两个线性无关的特解.
则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 是方程的通解.

4) $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程的一个特解, $Y(x)$ 是齐次方程的通解, 则

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

是二阶非齐次方程的通解.

5) 常数变易法的高阶应用. $y = u\cdot v$

$$(uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + C_n^n uv^{(n)}$$

代入原式

$$M_{n-1}(x)u^{(n)} + M_{n-2}(x)u^{(n-1)} + \cdots + M_0(x)u' + u(P_n(x)v^{(n)} + \cdots + P_0(x)v) = f(x)$$

$M_{n-1}(x)u^{(n)}+M_{n-2}(x)u^{(n-1)}+\cdots+M_0(x)u'+u(P_m(x)v^{(m)}+\cdots P_0(x)v)=f(x)$

$$\begin{cases} M_{n-1}(x)u^{(n)}+\cdots \quad M_0(x)u' = f(x) & (1) \\ P_m(x)v^{(m)}+\cdots \quad P_0(x)v=0. & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} v(x) \Rightarrow f(P_n(x),\cdots,P_0(x)) \\ \text{代入(2)式，求得} \quad y=u(x)v(x) \end{cases}$

6) 常系数齐次微分方程.

$$y''+py'+qy=0$$

简化方程 $y=e^{rx}$

$\rightarrow r^2e^{rx}+pre^{rx}+qe^{rx}=0$

$\rightarrow r^2+pr+q=0$ 成功将方程变成为一次二次方程（特征方程）

$$r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

(i) 当 $p^2-4q>0$ 时 $r_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ $r_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$

(ii) 当 $p^2-4q=0$ 时 $r_1=r_2=\frac{-p}{2}$

(iii) 当 $p^2-4q<0$ 时 $r_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{4q-p^2}i$ $r_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{4q-p^2}i$

若有两个不相等实根

则 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

若有两个相等实根.

只能设 $y_2/y_1=u(x)$ $y_2=u(x)e^{rx}$

$y'=u'(x)e^{rx}+ru(x)e^{rx}$

$y''=u''(x)e^{rx}+ru'(x)e^{rx}+ru'(x)e^{rx}+r^2u(x)e^{rx}$

$e^{rx}[u''+2r_1u'+r_1^2u)+p(u'+r_1u)+qu]=0.$

$\rightarrow u''+(2r_1+p)+(r_1^2+pr_1+q)u=0$

$2r_1+p=0$ 且 $(r_1^2+pr_1+q)=0$

则 $u''(x)=0$，不妨取 $u(x)=x.$

所以通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$

若两个不相等的共轭复根. 欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$

先证明一下（Taylor公式直接展开）欧拉公式.

$e^{i\theta}=1+i\theta+i^2\theta^2+i^3\theta^3\cdots+i^n\theta^n$

$\cos\theta=1+i^2\theta^2+i^4\theta^4\cdots i^{2n}\theta^{2n}$ 三角函数求导后相位差 $\frac{\pi}{2}$

$i\sin\theta=i\theta+\cdots i^3\theta^3\cdots i^{2n-1}\theta^{2n-1}$

可证.

$y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{\beta ix}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$

$y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{-\beta ix}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$

$\cdots=\frac{y_1+y_2}{\cdots}=e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad \cdots=\frac{y_1-y_2}{\cdots}=e^{\alpha x}\sin\beta x$

$y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{-\beta i x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$

$\therefore y_{Re} = \frac{y_1+y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad y_i = \frac{y_1-y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$

由于符合叠加原理，仍然为通解。

$\therefore y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

这时可以解一下无阻尼自由振动的微分方程。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$$

$x|_{t=0} = x_0,\ \frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0$，二阶需要两个边界条件。

$r^2 = -k^2 \qquad r = \pm ik \qquad p = k^2,\ q = 0$

$\therefore \alpha = 0 \quad \beta = k.$

$\therefore$ 通解为 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 　代入条件 $C_1 = x_0,\ C_2 = \frac{v_0}{k}.$

令 $x_0 = A\sin\phi \quad \frac{v_0}{k} = A\cos\phi.$

$x = A\sin(kt+\phi) \qquad f = \frac{k}{2\pi},\ T = \frac{2\pi}{k}.\ \omega = k$（单位时间转过的弧度为 k）

(1) 常系数非齐次微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

只要求一个特解：对于特定的 $f(x)$，有待定系数法，

$f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$

① $f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$，其中 $P_m(x)$ 是多项式

$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m.$

推测特解 $y^* = R(x)e^{\lambda x}$

$y^{*\prime} = e^{\lambda x}[\lambda R(x) + R'(x)]$

$y^{*\prime\prime} = e^{\lambda x}[\lambda^2R(x) + 2\lambda R'(x) + R''(x)]$

$\rightarrow R''(x) + (2\lambda+p)R'(x) + (\lambda^2+p\lambda+q)R(x) = P_m(x)$

i) 若 λ 不是特征方程的根。

设 $R_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m$，代入求解（比较系数）

ii) 若 λ 是单根。

$R(x) = xR_m(x)$，之后确定系数。

iii) 若 λ 是重根。

$R(x) = x^2R_m(x)$

② $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x]$.

应用欧拉公式

$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{i\theta})$

$\therefore f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2} + Q_n(x)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}]$

$f(x) = (\frac{P_l}{2} + \frac{Q_n}{2i})e^{(\lambda+i\omega)x} + (\frac{P_l}{2} - \frac{Q_n}{2i})e^{(\lambda-i\omega)x}$

$= P(x)e^{(\lambda+i\omega)x} + \overline{P(x)}e^{(\lambda-i\omega)x}$

为两个 $R_m(x)e^{\lambda x}$ 的和。

对于 $P(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$ 可求出一个 $y_1^* = x^ke^{(\lambda+\omega i)x}\cdot R(x)$

对于 $\overline{P(x)}e^{(\lambda-i\omega)x}$ 直接共轭 $y_2^* = x^ke^{(\lambda-\omega i)x}\cdot\overline{R(x)}$

对于 $P(x)e$ 可求出 $y_1 = x e$

对于 $\overline{P(x)}e^{(\alpha-i\omega)x}$ 直接共轭 $y_2^* = x^k e^{(\lambda-\omega i)}x\cdot\overline{R(x)}$