对数求和不等式

2020年3月29日 11:52

1. 定理.

对于非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 有.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \log\frac{a_i}{b_i} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \log\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

等号当且仅当 a_i/b_i 为常数时成立.

2. 说明.

这个公式和熵的形式很像. 结合熵的凹性 研究. 直观上这个公式是成立的. 是Jensen不等式的推广. 下面我们会证明

3. 证明.

通俗一点证明, 我们希望将不等式利用下凸函数来证明. 那么在形式上就需要变形.

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{a_i}{b_i} \log\frac{a_i}{b_i} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{a_i}{b_i}\right) \log\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\cdot b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

设 $t = a_i/b_i$, $\sum b_i = B$. 两侧同除 B.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{B}\cdot t\log t \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{B}\cdot t\log\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\cdot t}{B}$$

这与凸函数的性质相符. $E[f(x)] \geq f(E[x])$, 那么现在我们只需要证明 $t\log t$ 是一个下凸函数即可

对 $t\log t$ 求导. $(t\log t)' = \log t + 1$

$(t\log t)'' = (\log t + 1)' = \frac{1}{t}$, 所以这是一个下凸函数, 于是得证.