场论与麦克斯韦方程组（二）

2019年11月13日 22:32

0. 概述

在《场论与麦克斯韦方程组（一）》中，我们最后推导了时变电磁场的麦克斯韦方程组。为了描述方便，我们这里再给出结果，并进行编号。

积分形式		微分形式		介质特性方程
$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$	(1a)	$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	(2a)	$\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$
$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$	(1b)	$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	(2b)	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$
$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	(1c)	$\nabla\cdot\vec{B} = 0$	(2c)	$\vec{B} = \mu\vec{H}$
$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q$	(1d)	$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$	(2d)	$\vec{J} = \sigma\vec{E}+\vec{J}'$　$\vec{J}'$为非电外源的电流密度

我们顺带给出边界条件如下：

$$\vec{e_n}\times\vec{E} = 0 \qquad \vec{e_n}\times\vec{H} = \vec{J_s} \qquad \vec{e_n}\cdot\vec{D} = \rho_s \qquad \vec{e_n}\cdot\vec{B} = 0.$$

1. 标量位与矢量位

我们之前由亥姆霍兹方程可知，任一矢量可以分为标量的梯度＋矢量的旋度。静电场中，$\vec{E} = -\nabla\phi$，恒定磁场中 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$。而在时变电磁场中，我们发现场和源的关系更为复杂，至少 $\vec{E}\neq-\nabla\phi$，于是我们需要推导一下 $\vec{A}$ 和 ϕ 在时变电磁场中的意义。为了简化，我们假设介质是均匀的。

对(2a)式两边取散度得：

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H} = \nabla\times\vec{J}+\nabla\times\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

整理一下：

$$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{H} - \varepsilon\cdot\nabla\times\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \nabla\times\vec{J}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{H} - \varepsilon\cdot\left(\frac{\partial\nabla\times\vec{E}}{\partial t}\right) = \nabla\times\vec{J}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{H} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = \nabla\times\vec{J}$$

对(2b)式两边取散度得：

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

同理

$$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\nabla\times\left[\frac{\partial}{\partial t}(\mu\vec{H})\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\cdot(\nabla\times\mu\vec{H})$$

$$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$$

考虑到 $\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla\nabla\cdot A - \nabla^2\vec{A}$，且 $\nabla\cdot\vec{H} = 0$，$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$，可得

$$\nabla^2\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t} = -\nabla\times\vec{J} \qquad (3a)$$

$$\nabla^2\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho \qquad (3b)$$

由此我们可以看出，时变电磁场中场和源的关系较为复杂，并不像恒定场中用泊松方程或拉普拉斯方程那样简便。原因还是在于标量位 ϕ 和矢量位 $\vec{A}$ 与恒定场不同。下面我们来详细推导一下。

首先可以看到 $\nabla\cdot B = 0$，那么仍然有 $\nabla\times\vec{A} = \vec{B}$，代入(2b)

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A})$$

$$\Rightarrow \nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

那么与静电场 $\nabla\times\vec{E} = 0$ 不同，标量位有了新的定义：

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi.$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi.$$

我们称 $\vec{A}$ 为矢量磁位，ϕ 为标量电位，他们均是时间及空间的函数。我们利用 $\vec{A}$ 和 ϕ 重新推导方程，这与上面(3a)和(3b)实际上是等价的，麦克斯韦方程都是相互关联的。

利用(2a)

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{B} = \vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{A} = \mu\vec{J}+\mu\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial\nabla\phi}{\partial t} = -\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

$$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{A} = \mu\vec{J} - \mu\varepsilon\left(\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

由 $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi$ 和 (2d) 得、

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) - \nabla\cdot\nabla\phi = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + \nabla\cdot\nabla\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

由亥姆霍兹定理可知，只有矢量场的散度和旋度才能唯一确定、对于矢量磁位来说，其旋度 $\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$ 已给定。对于其散度可以任意给定、因为针对空间不同点可以选不同的值。我们可以利用这个便利继续化简。

上式中并没有 $\nabla\cdot\vec{A}$，为了构造 $\nabla\cdot\vec{A}$，我们可以继续对 $\nabla\times\nabla\times\vec{A}$ 变形，与之前一样。

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla\nabla\cdot\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$$

我们又可以重新将上式写为

$$\nabla^2\vec{A} - \nabla\nabla\cdot\vec{A} = \mu\varepsilon\left(\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \mu\vec{J}$$

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

我们希望让两个式子独立一些，第一个式子中只有 $\vec{A}$，第二个式子中只有 ϕ，即

$$\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu\varepsilon\left[\nabla\left(\frac{\nabla\cdot\vec{A}}{\mu\varepsilon} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right] - \mu\vec{J}$$

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

那么若

$$\nabla\cdot\vec{A} = -\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (4c)$$

则上面两式则可变为

$$\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} \qquad (4a)$$

$$\nabla^2\phi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (4b)$$

(4c) 则称为洛伦兹条件，它说明了 $\vec{A}$ 与 ϕ 应该满足怎么样的关系，只要知道电流密度 $\vec{J}$ 和 ρ 则可分别求出 $\vec{A}$，ϕ。而这个式子在解法上比(3)式要简单很多。要知道偏微分方程的求解到现在也是一个难题，并不是所有的方程都可以解出来。而在时变电磁场中，又有 $\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$。

而在静态场中，$\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$ 与 $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ 都为0，则与之前的泊松方程相同。关于这个方程的解法详细内容可以参阅数学的数学物理方程。对于这两个公式，我们下面也会讨论（因为目前还没有看数学物理方程）

2. 位函数方程求解

我们给出一个并不需要太多基础知识的解法，这节内容只是为了得到结论。我们根据静态场的结果，采用类比的方法求解。首先推导(4b)的解，我们先求出一个位于坐标原点的时变点电荷，之后用叠加原理推广到一般情形。

由于点电荷位于坐标原点，那么只是关于变量 r 的解。

$$\nabla^2\phi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

对于 r，$h_1 = 1$　$h_2 = r\sin\theta$　$h_3 = r$。

那么 $$\nabla^2(\phi) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right)\right] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)$$

在 $0 < r < \infty$ 内有

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

式中 $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$、但教材中给的式子是 $\frac{\partial^2(\phi r)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(\phi r)}{\partial t^2} = 0$。

我们可以得到一个类似于波动方程的形式，那么解的形式则为

$$\phi r = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

上式中的第二项是一个非因果信号，那么我们直接舍弃。虽然从教材中的方程可以直接得到，但是这并不影响，我们毕竟也不是直接求解得来。

那么

$$\phi(r,t) = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}$$

在静电场中，源点处若有一个点电荷 $q = \rho dV$，产生的电位为

$$\phi(r) = \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon r}$$

那我们类比一下，

$$f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) = \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)dV}{4\pi\varepsilon}$$

那我们类比一下.

$$\phi_1\left(t-\frac{r}{v}\right)=\frac{\rho\left(t-\frac{r}{v}\right)dV}{4\pi\varepsilon}$$

即得

$$d\phi(r,t)=\frac{\rho\left(t-\frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon r}\,dV.$$

现在我们只需要将源放在空间任一点. 那么 $r\to|\vec{r}-\vec{r}'|$, $\phi(r,t)$ 也将变为 $\phi(\vec{r},t)$. 求积分后得.

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\rho\left(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

对于 $\vec{A}$, 我们可以将其在直角坐标系下展开. 那么也会得到三个与上面形式一样的波动方程. 分别求解然后合成.
得到 $\vec{A}(\vec{r},t)$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}\left(\vec{r}',t-\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{v}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

现在我们来讨论一下物理意义. 在表达式中即有时间也有位矢. 那么这是一个具有波函数的性质. 也就是说, 空间某点在时刻 t 产生的标量位或矢量位必须根据 $t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}$ 时刻的源分布进行求积. 那么传播的时间差则为 $|\vec{r}-\vec{r}'|/v$, 其中 v 就是波速. 在真空中.

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=299792458\approx3\times10^8\ m/s$$

这也就是光波在真空中的传播速度, 光速 c.
值得注意的是, 当源消失, 但电磁波在空间也不会消失. 这种情形我们称为电磁辐射.
静态场之所以称之为束缚场, 也是因为没有传播的能力. 在源近处, 因为时差很小, 则称之为似稳场, 远处称为辐射场.
之后我们会专门分析电磁辐射.
标量场 ϕ 和矢量位 $\vec{A}$ 随着时间变化总是落后于源. 那么称为滞后位.
对于标量位 ϕ 和矢量位 $\vec{A}$ 的数学表示形式. 在不同的空间中有

$$\rho dV\Rightarrow\rho_S dS\Rightarrow\rho_l dl\qquad\vec{J}dV\Rightarrow\vec{J}_S dS\Rightarrow\vec{J}_l dl$$

对应的积分形式也会随之改变.

3. 能量密度和能流密度矢量

我们之前提到了空间中的磁场能量和电场能量密度也可以推广到时变电磁场. 时变电磁场总是时变, 但基本的物理定律还是不变的. 外加上热运动的焦耳定律. 有.

$$\begin{cases}w_e(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\varepsilon E^2(\vec{r},t)\\ w_m(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\mu H^2(\vec{r},t)\\ p_l(\vec{r},t)=\sigma E^2(\vec{r},t)\end{cases}$$

能量密度的概念定义为电磁场的能量储存密度. 那么则为电场能量密度和磁场能量密度之和.

$$w(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\left[\varepsilon E^2(\vec{r},t)+\mu H^2(\vec{r},t)\right].$$

能流密度矢量的概念自然也很好理解. 也就是电磁场内的能量传播. 严格来说。能流密度矢量的方向表示能量流动方向, 其大小表示单位时间内垂直穿过单位面积的能量. 或者说, 垂直穿过单位面积的功率. 在英美书刊中. 能流密度矢量又叫做坡印廷 (Poyning) 矢量. 俄罗斯书刊中称 (Умов) 乌莫夫矢量. 能流密度矢量以 $\vec{S}$ 表示. $[S]=W/m^2$
从能量守恒定律中. 我们因有如下等式.

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V w\,dV=\oint\vec{S}\cdot d\vec{S}+\int_V p_l\,dV.$$

这个公式称为时变电磁场能量定理, 其意义是有限空间中单位内的电磁场的能量以能流密度矢量和焦耳热的形式减少.
我们则可以根据这个定理来确定坡印廷矢量的数学形式

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2\,dV=\int_V\nabla\cdot\vec{S}\,dV+\int_V\sigma E^2\,dV.$$

得到

$$\nabla\cdot\vec{S}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mu H^2)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E^2)-\sigma E^2.$$

我们将 μ,ε,σ 略去. 以求得更为简便的结果.

$$\nabla\cdot\vec{S}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}\cdot\vec{H})-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\cdot\vec{E})-\vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{H}-\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\cdot\vec{B}-\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\vec{E}-\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$=(\nabla\times\vec{E})\cdot\vec{H}-(\nabla\times\vec{H})\cdot\vec{E}$$

根据矢量恒等式.

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}-\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}$$

$$= (\nabla\times\vec E)\cdot\vec H - (\nabla\times\vec H)\cdot\vec E$$

根据矢量恒等式

$$\nabla\cdot(\vec E\times\vec H) = \vec H\cdot\nabla\times\vec E - \vec E\cdot\nabla\times\vec H$$

可得

$$\vec S(\vec r,t) = \vec E(\vec r,t)\times\vec H(\vec r,t)$$

至此，我们已经求得了能量密度和能流密度矢量的数学表达形式.

4. 矢量场的唯一性定理.

定理的证明比较复杂，也不符合我们常规的数学思维. 这里就直接给出矢量场唯一性定理的内容. 然后给出其证明. 目前这个阶段，我们还不要有这样的创造性直觉.

位于区域中的矢量场，当其散度、旋度以及边界上场量的切向分量或法向分量给定后，则该区域的矢量场被唯一地确定.

这一结论被称为唯一性定理. 从定理的描述中，我们可以发现这与亥姆霍兹定理很接近. 亥姆霍兹定理描述的是一个无限区域，而唯一性定理是有限区域. 那我们证明时也将由这点差异出发.

若两个矢量场 $\vec F_1$ 和 $\vec F_2$ 满足给定的条件，即 $\nabla\cdot\vec F_1 = \nabla\cdot\vec F_2$，$\nabla\times\vec F_1 = \nabla\times\vec F_2$，那么两者的差场 $\delta\vec F = \vec F_1 - \vec F_2$ 满足

$$\nabla\cdot\delta\vec F = 0 \qquad \nabla\times\delta\vec F = 0.$$

那么由于差量场无旋，那么一定可以用标量 ϕ 表示

$$\delta\vec F = \nabla\phi.$$

根据 $\nabla\cdot\delta\vec F = 0$ 可得

$$\nabla\cdot\nabla\phi = 0$$

我们与这样结果代入格林第一公式，令 $\psi = \phi$

$$\int_V (\phi\nabla^2\phi + |\nabla\phi|^2)\, dV = \oint_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS$$

因为 $\nabla^2\phi = 0$，则有

$$\int_V |\nabla\phi|^2 dV = \oint \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS.$$

若给定的是边界上的法向分量，那么

$$(\delta F)_n = (\nabla\phi)_n = \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0. \Rightarrow \int_V |\nabla\phi|^2 dV = 0 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow \delta\vec F = 0.$$

则推出了在法向分量给定时，$\vec F_1 = \vec F_2$.

若给定边界上的切向向量，则也有

$$(\delta\vec F)_t = (\nabla\phi)_t = \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0.$$

那么边界面是标量场的等值面.

$$\oint \phi\frac{\partial\phi}{\partial n} dS = \phi\oint\frac{\partial\phi}{\partial n} dS = \phi\oint\nabla\phi\cdot d\vec S = \phi\int_V \nabla^2\phi\, dV = 0.$$

则推出了切向分量给定，$\vec F_1 = \vec F_2$

至此定理得证. 而亥姆霍兹定理，则是无限大空间上，标量场满足 $\phi \propto \frac{1}{R^{1+\varepsilon}}$，那么. 我们也可以推出上述积分为0.
就得到了亥姆霍兹定理.
那么由此我们可以不加证明地得到时变电磁场的唯一性定理

在闭合面S包围的区域V中，当t=0时刻的电场强度E及磁场强度H的初始值给定时. 又在 $t>0$ 的时间内只要边界S上的电场强度切向分量 E_t，或者磁场强度的切向分量 H_t 给定后，那么在 $t>0$ 的任一时刻，体积V中任一点的电磁场由麦克斯韦方程唯一地确定.

5. 麦克斯韦方程的复矢量形式.

在电路中我们已经深知复指数函数的重要性，那么对于电磁波，有必要讨论一下其复指数的形式
首先我们约定一下符号. 幅值我们用下标m，有效值则直接用字母. 复数我们用点表示. 例如.

$$\vec E(\vec r,t) = \vec E_m(\vec r)\cos[\omega t + \psi_e(\vec r)]$$

$$\dot{\vec E}_m(\vec r) = \vec E_m(\vec r)e^{j\psi_e(\vec r)} \qquad \vec E(\vec r,t) = \mathrm{Re}[\dot{\vec E}_m(\vec r)e^{j\omega t}]$$

$$\vec E(\vec r,t) = \vec E_m(\vec r)\cos[\omega t + \psi_e(\vec r)].$$

$$\dot{\vec E}_m(\vec r) = \vec E_m(\vec r)e^{j\psi_e(\vec r)} \qquad \vec E(\vec r,t) = Re[\dot{\vec E}_m(\vec r)e^{j\omega t}].$$

$$\dot{\vec E}(\vec r) = \vec E(\vec r)e^{j\psi_e(\vec r)} \qquad \vec E(\vec r) = \vec E_m(\vec r)/\sqrt2.$$

可以将复指数形式代入(2a),(2b),(2c),(2d)中.

例如(2a)

$$\nabla\times\vec H = \vec J + \frac{\partial\vec D}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla\times Re[\sqrt2\dot{\vec H}e^{j\omega t}] = Re[\sqrt2\dot{\vec J}e^{j\omega t}] + \frac{\partial}{\partial t}Re[\sqrt2\dot{\vec D}e^{j\omega t}].$$

我们在通信中已经知道,实部和复数是等价的,我们可以直接用复数表示.

$$\nabla\times\dot{\vec H} = \dot{\vec J} + j\omega\dot{\vec D}$$

同理对于(2b),(2c),(2d),我们可以得到完整的表示形式

$$\nabla\times\dot{\vec H} = \dot{\vec J} + j\omega\dot{\vec D} \qquad (5a)$$

$$\nabla\times\dot{\vec E} = -j\omega\dot{\vec B} \qquad (5b)$$

$$\nabla\cdot\dot{\vec B} = 0 \qquad (5c)$$

$$\nabla\cdot\dot{\vec D} = \dot\rho \qquad (5d)$$

同理,电荷守恒定律和介质特性也可以写成复数形式

$$\nabla\cdot\dot{\vec J} = -j\omega\dot\rho$$

$$\dot{\vec D} = \varepsilon\dot{\vec E}$$

$$\dot{\vec B} = \mu\dot{\vec H}$$

$$\dot{\vec J} = \sigma\dot{\vec E} + \dot{\vec J}$$

之前我们推导的(3)式和(4)式也可写成复矢量形式,(4)式下一节讨论,因为还有他解的形式等问题.

$$\nabla^2\dot{\vec H} + \omega^2\mu\varepsilon\dot{\vec H} = -\nabla\times\dot{\vec J} \qquad (6a)$$

$$\nabla^2\dot{\vec E} + \omega^2\mu\varepsilon\dot{\vec E} = j\omega\mu\dot{\vec J} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\dot\rho \qquad (6b)$$

6. 位函数的复矢量形式

首先我们先改写(4)式.

$$\nabla^2\dot{\vec A} + \omega^2\mu\varepsilon\dot{\vec A} = -\mu\dot{\vec J}$$

$$\nabla^2\dot\phi + \omega^2\mu\varepsilon\dot\phi = -\frac{\dot\rho}{\varepsilon}.$$

接下来讨论其解的形式,

$$\phi(\vec r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\rho(\vec r', t-\frac{|\vec r-\vec r'|}{v})}{|\vec r-\vec r'|}dV'$$

$$\vec A(\vec r,t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec J(\vec r', t-\frac{|\vec r-\vec r'|}{v})}{|\vec r-\vec r'|}dV'$$

对于其复数形式,时间的影响只表现在相位,那么相位的滞后 $-\frac{\omega}{v}|\vec r-\vec r'|$

记 $k=\frac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$,由 $k=\frac{2\pi f}{v}$ 可得 k 称为波数的概念,(这个物理量代表1单位距离内波的个数)

那么,其复数形式可以改写为

$$\dot{\vec A}(\vec r,t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\dot{\vec J}(\vec r')e^{-k|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|}dV'$$

$$\dot\phi(\vec r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\dot\rho(\vec r')e^{-k|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|}dV'$$

洛伦兹条件的复矢量形式为

$$\nabla\cdot\dot{\vec A} = -j\omega\mu\varepsilon\dot\phi$$

正弦电磁场与位函数的关系也可用复数表示为.

$$\dot{\vec B} = \nabla\times\dot{\vec A}$$

$$\dot{\vec E} = -j\omega\dot{\vec A} - \nabla\dot\phi = -j\omega\dot{\vec A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\dot{\vec A}}{j\omega\mu\varepsilon}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla\phi = -j\omega\vec{A} + \frac{\nabla\nabla\cdot\vec{A}}{j\omega\mu\varepsilon}$$

那么同样，只要求出复矢量 $\vec{A}$，就可以求出电场强度和磁场强度、

7. 复能流密度矢量

复数的内积取共轭，因此能流密度的最大值 $w_m(\vec{r})$

$$w_m(\vec{r}) = w_{em}(\vec{r}) + w_{mm}(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\,\vec{E}_m\cdot\vec{E}_m^* + \frac{1}{2}\mu\,\vec{H}_m\cdot\vec{H}_m^*$$

那么对于功率，

一个周期的平均值也就对应去有效值。

$$w_{av}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon\,\vec{E}\cdot\vec{E}^* + \frac{1}{2}\mu\,\vec{H}\cdot\vec{H}^*$$

那么也有

$$w_{av} = \frac{1}{2}(w_{em} + w_{mm}) = \frac{1}{2}w_m.$$

同样，焦耳定律

$$p_{lm}(\vec{r}) = \sigma E_m^2(\vec{r}) = \sigma\,\vec{E}_m\cdot\vec{E}_m^* \qquad p_{lav}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\sigma\,\vec{E}_m\cdot\vec{E}_m^*$$

我们希望时变电磁场的能量定理在复数域依旧成立。

同理，我们一定能推导导得的复能流密度矢量，但是它不能从实部变为复数。

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)$$

若 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 与 $\vec{H}(\vec{r},t)$ 都是正弦形式的电磁波，则

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}_m(\vec{r})[\cos(\omega t+\phi_e)] \times \vec{H}_m(\vec{r})[\cos(\omega t+\phi_m)]$$

$$= [\vec{E}_m(\vec{r})\times\vec{H}_m(\vec{r})]\cos(\omega t+\phi_e)\cos(\omega t+\phi_m)$$

多说一句，$\vec{E}_m(\vec{r})$ 和 $\vec{H}_m(\vec{r})$ 通常也是一个正弦形式的变量，我们就可以变为 $A\cos(\omega t - kx)$ 这样的形式。

一个周期内的

$$\vec{S}_{av}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}[\vec{E}_m(\vec{r})\times\vec{H}_m(\vec{r})]\cos(\phi_e-\phi_m) = \vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}(\vec{r})\cos(\phi_e-\phi_m)$$

我们定义复波印廷矢量对应他的有效值。

$$\vec{S}_c(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})e^{j\phi_e}\times\vec{H}(\vec{r})e^{-j\phi_m} = \vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}(\vec{r})e^{j(\phi_e-\phi_m)}$$

则

$$\mathrm{Re}[\vec{S}_c(\vec{r})] = \vec{S}_{av}(\vec{r},t)$$

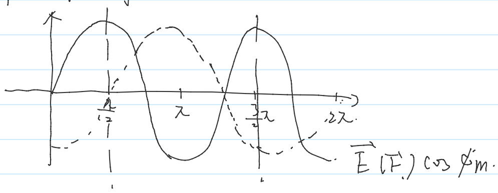
复能流密度矢量的代表的是一个周期内的平均值，而这个值和电场磁场最初的相位有关，即 ϕ_e，ϕ_m。

若 $\phi_e - \phi_m = 2n\pi$，则 $\mathrm{Re}[\vec{S}_c(\vec{r})]>0$，代表能流沿正方向传播，而 $\mathrm{Im}[\vec{S}_c(\vec{r})]=0$。

若 $\phi_e - \phi_m = (2n-1)\pi$，则 $\mathrm{Re}[\vec{S}_c(\vec{r})]<0$，代表能流沿负方向传播，而 $\mathrm{Im}[\vec{S}_c(\vec{r})]=0$

若 $\phi_e - \phi_m = \frac{\pi}{2}\pm n\pi$，则 $\mathrm{Re}[\vec{S}_c(\vec{r})]=0$，$\mathrm{Im}[\vec{S}_c(\vec{r})]\neq 0$，这样可以理解为能量没有流动，而在空间中储存了起来。

从时域角度我们发现，我们将某场点一个周期的情形画出来，$\phi_e - \phi_m = \frac{\pi}{2}$



如图可见，是一个偶函数乘以奇函数，那么乘积为0，在每半周期正负交替，故可以认为能量被储存在这一场点

最后，我们来讨论一下时变电磁场的能量定理，在实数域内，我们直接用能量守恒定理给出了电磁场的能量定理。但是在复数域还存在内部能量的储存，也即上面提到的相位差 $\phi_m - \phi_e$。那么如果我们理解则会有 $+\phi_m$ 和 $-\phi_e$ 之分。也即电场能量密度在复数域要以负数的形式存在。结合

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}^*) = \vec{H}^*\cdot\nabla\times\vec{E} - \vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}^*$$

$$\nabla\times\vec{H}^* = \sigma\vec{E}^* - j\omega\varepsilon\vec{E}^*$$，注意这里是 $-j\omega$。

那么有

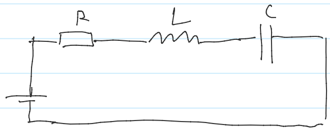
$$-\oint\vec{S}_c(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \int_V p_l(\vec{r})\,dV + j\omega\int_V 2[w_{mav}(\vec{r}) - w_{eav}(\vec{r})]\,dV.$$

则有.

$$-\oint \vec{S}_c(\vec{r})\cdot d\vec{s} = \int_V p_l(\vec{r})\,dV + j\omega\int_V 2[w_{mav}(\vec{r}) - w_{eav}(\vec{r})]\,dV.$$

这也称为复能量定理.

我们以一个RLC电路来说明.



$u_R = I\cdot R.$ $\quad u_L = L\frac{dI}{dt}$ $\quad du_c/dt = I/C.$

$U_R(s) = R\cdot I(s)$ $\quad U_L(s) = sL\cdot I(s)$ $\quad U_C(s) = \frac{I(s)}{sC}.$

$$U(s) = U_R(s) + U_L(s) + U_C(s)$$
$$= \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) I(s)$$

若电路振荡 $sL + \frac{1}{sC} = 0 \Rightarrow j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0 \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

设 $I = Ae^{j\omega t}$

$U = ARe^{j\omega t} + j\sqrt{\frac{L}{C}}Ae^{j\omega t} - j\sqrt{\frac{L}{C}}Ae^{j\omega t}.$

则 $P = UI^* = A^2R - \sqrt{\frac{L}{C}}A^2 + A^2\sqrt{\frac{L}{C}} = A^2R.$

符合通式

$$P_e = UI^* = P_R + j2\omega(w_L - w_C)$$

于是得证.

此外,前述的唯一性定理用于稳态的正弦电磁场中.虽然,初始条件不再需要.无源区中的正弦电磁场被其边界上的电场切向分量或磁场切向分量唯一地确定.