场论与麦克斯韦方程组（一）

2019年9月8日 8:38

1. 坐标系变换.

不同坐标系下的基向量和Nabla算子已经在"数学—>梯散旋推导"中给出.

2. 亥姆霍兹定理 (Helmholtz's theorems.)

若矢量场 $\vec{F}(\vec{r})$ 在无限区域中处处是单值的，其导数连续有界，源分布在有限区域V中，则当矢量场的散度和旋度给定后，该矢量场 $\vec{F}(\vec{r})$ 可以表示为

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) + \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

即可以表示为一个负梯度和旋度. 其中

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dV'$$

无限空间中矢量场被其散度及旋度唯一表示，(这甚至包括了常数的矢量部分.

为了证明这一个定理（证明它也是我能力范围的数学水平），首先我们先要明确 $R=|\vec{r}-\vec{r}'|$，而且还要熟悉他. 我们先计算下 $\nabla(\frac{1}{R})$，然后计算 $\nabla^2(\frac{1}{R})$

① $\nabla(\frac{1}{R})$：$(R\neq 0)$

计算他不能简单的从球坐标系出发，因为不能简单的用 $\vec{R}$ 表示. 我们还是采用直角坐标系.

$$\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$$

$$\vec{r}' = x'\vec{e_x} + y'\vec{e_y} + z'\vec{e_z}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x-x')\vec{e_x} + (y-y')\vec{e_y} + (z-z')\vec{e_z}$$

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

$$\nabla = \vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla' = \vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x'} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y'} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z'}$$

现在我们可以开始计算了.

$$\nabla(\frac{1}{R}) = \vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{R}) + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{R}) + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{R})$$

$$= -\frac{1}{R^2}(\vec{e_x}\frac{\partial R}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial R}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial R}{\partial z})$$

$$= -\frac{1}{R^2}(\vec{e_x}\cdot\frac{(x-x')}{R} + \vec{e_y}\cdot\frac{(y-y')}{R} + \vec{e_z}\frac{(z-z')}{R})$$

$$= -\frac{1}{R^3}\vec{R}$$

同理. 我们还可以得到 $\nabla'(\frac{1}{R}) = \frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla(\frac{1}{R})$，这个结论下面会用到.

② $\nabla^2(\frac{1}{R})$，

我们先假设 $R\neq 0$.

则 $\nabla^2(\frac{1}{R}) = \nabla\cdot(-\frac{\vec{R}}{R^3}) = \nabla\cdot(\frac{(x-x')\vec{e_x}}{-R^3} + \frac{(y-y')\vec{e_y}}{-R^3} + \frac{(z-z')\vec{e_z}}{-R^3})$.

我们算一个方向的分量就行了. 因为其余都与上述类似.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{(x-x')}{-R^3}\vec{e_x})\vec{e_x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{(x-x')}{-R^3}) = -\frac{R^3-(x-x')3R^2\cdot\frac{(x-x')}{R}}{R^6} = -\frac{1}{R^3} + \frac{3(x-x')^2}{R^5}$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{(y-y')}{R^3}) = -\frac{1}{R^3} + \frac{3(y-y')^2}{R^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{(z-z')}{R^3}) = -\frac{1}{R^3} + \frac{3(z-z')^2}{R^5}$$

所以. $\nabla^2(\frac{1}{R}) = \nabla\cdot(-\frac{\vec{R}}{R^3})$

$$= -\frac{3}{R^3} + \frac{3R^2}{R^5} = 0.$$

为了计算奇点 $R=0$ 处. 我们需要另想办法. 高数中有用格林公式的一种解法可以参考.

我们在计算 $\nabla^2(\frac{1}{R})$ 中，把 $\vec{r}'$ 看作了定点. 我们不妨让 $\vec{r}'$ 看作坐标原点.

即 $\vec{r}' = 0$. $\vec{R} = \vec{r}$

我们利用散度公式.

即 $\vec{r}'=0$, $\vec{R}=\vec{r}$

我们利用散度公式.

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)dV = \int_V \nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)dV = \oint \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\cdot d\vec{S}$$

，这时都不存在 $R=0$ 的点了.

$$\Rightarrow \int_V \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)dV = \oint_S \left(-\frac{\vec{R}}{R^3}\right)\cdot d\vec{S} = -\frac{1}{a^2}\oint \hat{r}\cdot d\vec{S} = -\frac{1}{a^2}\oint a\cdot dS = -4\pi.$$

我们将有向曲面取反. 则 $\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)dV = 4\pi$.

Form $R\neq 0$ 时:

$$\int_V\left[-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)\right] = 0.$$ 不存在.

我们可以定义一个δ函数. 专门讨论这种情况

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-x')dx = \begin{cases} f'(x) & x\in(a,b) \\ 0 & x'\notin(a,b) \end{cases}$$

$$\int_S f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')dS = \begin{cases} f(\vec{r}') & r'\in S \\ 0 & r'\notin S \end{cases}$$

$$\int_V f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')dV = \begin{cases} f(\vec{r}') & r'\in V \\ 0 & r'\notin V \end{cases}$$

且 $$\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \begin{cases} \infty & \vec{r}=\vec{r}' \\ 0 & \vec{r}\neq\vec{r}' \end{cases}$$

于是可认为 $$-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = \delta(R)$$

$$\to \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(R)$$

现在我们可以证明亥姆霍兹定理了.

当 $V > V'$ 时, $r'\in V$,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_V \vec{F}(\vec{r}')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')dV$$

且 $$\delta(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)$$

所以 $$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \vec{F}(\vec{r}')\,\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dV'$$

我们现在发现算子是对 $\vec{r}$, 积分则是对 $\vec{r}'$ 求积, 则.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int_V \vec{F}(\vec{r}')\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

利用矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla\nabla\cdot\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla\nabla\cdot\int_V \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int_V \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

这时我们令 $$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\int_V \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\nabla\times\int_V \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'.$$

$$\therefore \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) + \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

我们现在从 $\nabla\to\nabla'$ 转换, 所以我们需要将 ∇ 放进去.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \nabla\cdot\frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV = \frac{1}{4\pi}\int_V \vec{F}(\vec{r}')\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV.$$

这时 $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$ 就用到了.

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_V \vec{F}(\vec{r}')\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

我们还要把 $\vec{F}(\vec{r}')$ 挪进去. 那可能 $\nabla(\phi\vec{F}) = \nabla\phi\cdot\vec{F} + \nabla\cdot\vec{F}\,\phi$ 这样就进去了.

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left[\vec{F}(\vec{r}')/|\vec{r}-\vec{r}'|\right]dV + \frac{1}{4\pi}\int_V\left[\nabla'\cdot\vec{F}(\vec{r}')\right]\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV.$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \vec{F}(\vec{r}')/|\vec{r}-\vec{r}'|\,dS'$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \vec{F}(\vec{r}')/|\vec{r}-\vec{r}'|\,d\vec{S}'$$

现在我们只需要让二项为0就行了。但是我不行。

我们来看下这个 $\phi(\vec{r})$，推导 $\vec{A}(\vec{r})$。

推导的思路和之前差不多，直接给出结果。

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' + \frac{1}{4\pi}\oint \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\times d\vec{S}'$$

这时，我们发现，第二项相互抵消，一起证毕。

如果我们学过向元数，则本不用证这个，这个也表明了，任一矢量场可表示为一个无旋场和无源场之和。

我们若是知道一个矢量场的散度和梯度，就可以求出这个矢量场。

3. 静电场的介质极化问题.

电介质，就是通常所说的大量电中性的分子组成的绝缘体，可以分为无极分子和有极分子。

无极分子：分子的正负电荷中心在无电场时重合，如：H_2。

有极分子：分子的正负电荷中心在无电场时不重合，可以看成电偶极矩，如：H_2O。但大量分子的电偶极矩之和为0。

当有外加电场时，在原子范围内正负电荷会有偏移，表现在无极分子中则为出现了电偶极子。有极分子中则是电偶极子的偏移，而这些偏移都是由介质的束缚电荷引起的。

为了描述极化的强度，定义了电极化强度的概念，定义为单位体积中的电矩矢量和

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N}\vec{p_i}/\Delta V.$$

通过实验发现，电极化强度和电场强度成正比。

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E} \quad ,\quad \chi_e \text{为电极化率}.$$

在直角坐标系下。

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{e11} & \chi_{e12} & \chi_{e13} \\ \chi_{e21} & \chi_{e22} & \chi_{e23} \\ \chi_{e31} & \chi_{e32} & \chi_{e33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}.$$

当电极化率与电场方向无关，则为各向同性介质。

当电极化率与电场方向有关，则为各向异性介质。

空间内各点的极化率相同，则为均匀介质，否则为非均匀介质。

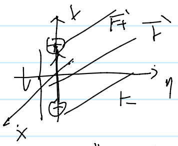
电极化率与电场强度大小无关的介质称为线性介质，否则为非线性介质。

电介质中的正负电荷，在电场力的作用下只能在原子或分子范围内作微小位移，它们叫束缚电荷（Bound Charge）。而极化就是出现束缚电荷的现象。

由于外加电场会使束缚电荷发生微小位移，从而使束缚电荷在表面和不均匀介质的体内形成了有一定规律的分布，这样发生极化的电荷则叫极化电荷。

下面我们推导一下电介质的面电荷密度 ρ_s' 和体电荷密度 ρ'。

我们可以先研究单独电矩的电势。



如图，当 $|\vec{r}|$ 远大于 $|\vec{l}|$ 时，我们认为 $\vec{r}^+$ 和 $\vec{r}^-$ 与 $\vec{r}$ 平行，则

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^+}-\frac{1}{r^-}\right) = \frac{q(r^- - r^+)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q\,\vec{l}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

所以单位体积产生的势能为

$$d\varphi(r) = \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'$$ 后面的步骤和前面的证明思路一致，现在直接给出结果。

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot d\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{-\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'.$$

上式的第一项，我们发现面电荷密度 $\rho_S' = \vec{P}(\vec{r})\cdot\vec{e}_n$

体电荷密度 $\rho'(r) = -\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{r}')$

而体电荷的积分值可以用散度定理

$$q' = \int -\nabla'\vec{P}(\vec{r})\,dV' = -\oint \vec{P}(\vec{r}')\cdot d\vec{S}'.$$

体电荷密度 $\rho'(r) = -\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')$

而体电荷的积分值可以用散度定理

$$q' = \int_{V'} -\nabla' \vec{P}(\vec{r}')\, dV' = -\oint \vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'.$$

面电荷的积分则为

$$q_b' = \oint_S \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{e}_n \cdot dS = \oint \vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'.$$

所以表面的束缚电荷和体内的束缚电荷是等值异性的。
这一点与电荷守恒原理相符合。

在介质外部，电介质产生的电通量为0，但内部却不为0。

在介质内部，穿过任意闭合面S的电通为

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q + q')$$

$$\Rightarrow \oint (\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}(\vec{r}'))\, d\vec{S} = q.$$

于是我们发现自由电荷和电场和束缚电荷体密度有联系，而$\vec{P}$则和$\vec{E}$也有关系。$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

令 $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi_e\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}$，$1+\chi_e \Rightarrow \varepsilon_r$.

则 $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q.$

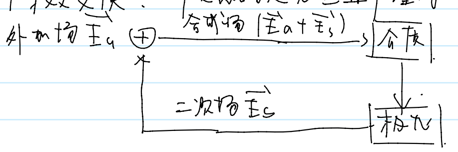
$\vec{D}$ 我们称为电通密度，又称电位移矢量。则我们有 $\nabla \cdot D = \rho \Rightarrow \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon}$.

我们现在重新审视这个过程，主要有两步等效操作。

① 我们考电矩的电势等效为了束缚电荷的电势，从而推导出了束缚电荷的密度。

② 我们用了束缚电荷加自由电荷共同产生了静电场的推论。

由于这是一个等效变换，所以思路是完整且严谨的。



4. 恒定电流场

电磁场这门课的章节编排其实是一个最大的困难点，其原因在于，这门学科是由实验为基础的，而将实验结果定量描述在当时是一个问题，数学在那时并不够用。而我们的教材已经用后期的数学来描述这些实验。这样的好处虽然可以帮助学生打牢基础，但是会让学生不能完全的明白前因后果。

例如，库仑定律 $\vec{E} = \frac{q\,\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 这式子很简单，但是，这样引出的电场力是什么呢？我们天生就知道 ε_0 这个常数吗？这是先知道了电场强度的操作通后，为了修正比例而引出的，我们对 $\vec{E}$ 的测定只能由 $\vec{F}$ 给出，这就是历史的发展。

我们current并不是在学习历史，但是无论如何都要保证思路的完整性。

关于恒定电流场我们简单说明一下，先是电流

$I = \frac{dq}{dt}$，代表一种"流"。

$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$，$\vec{J}$ 为电流密度。$\vec{J} = \sigma\vec{E}$，电导率（电流由电场力驱动）。

$I = \vec{J}\vec{S} = \sigma\vec{E}\vec{S} = \sigma ES = \sigma\frac{U}{l}S = \frac{U}{R}$. 其中 $R = \frac{l}{\sigma S}$　$\vec{J} = \rho\vec{v}$.

$\nabla \times \vec{J} = 0.$

$\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$，恒定电流 $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$，则 $\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$　$\nabla \cdot \vec{J} = 0$

则

$$\nabla \cdot (\sigma\vec{E}) = 0.$$

$$\nabla\sigma \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{E}\,\sigma = 0.$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\nabla\sigma \cdot \vec{E}}{\sigma}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{-\varepsilon\vec{E} \cdot \nabla\sigma}{\sigma}.$$

在均匀介质中，驻立电荷 ρ 只能分布在表面。

根据 $\nabla \cdot E = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon}$.

$\Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} = \rho_0 e^{-\tau t}$，$\tau$ 为弛豫时间。

5. 恒定磁场

5. 恒定磁场.

由于这里的基础很薄弱，则重点研究这里，需注意，这里的磁场是恒定的。

5.1. 磁通密度，

磁场对于运动的电荷有作用力，我们描述新物理量时，都应该使用已知的物理量。

实验证明 $\vec F = q\vec v\times\vec B$，这里用数学直接描述出来。

电流元所受的力. $I d\vec l = \frac{dq}{dt}\cdot d\vec l = dq\cdot\vec v$

$$\vec F = I d\vec l\times\vec B = dq\cdot\vec v\times\vec B$$

所以电流环在磁场的作用下会受到一个力矩。

$$M = Fl = IlB\cdot l = ISB.$$

矢量形式为 $\vec T = I(\vec S\times\vec B)$ $\vec m = I\vec S$ 为磁矩. $\vec T = \vec m\times\vec B$

磁通

$$\phi = \int_S \vec B\cdot d\vec S$$

磁通线 $\vec B\times d\vec l = 0.$

5.2 真空中的电磁场.

依据安培的安培环路定律、

$$\oint_l \vec B\cdot d\vec l = \mu_0 I.$$

μ_0为真空下的常数.

以及磁通连续性原理

$$\oint_S \vec B\cdot d\vec S = 0.$$

对于某点来说.

$$\oint \vec B\cdot d\vec l = \int_S \nabla\times\vec B\cdot d\vec S = \int_S \mu_0\vec J\cdot d\vec S$$

$$\int_S \nabla\times\vec B - \mu_0\vec J = 0.$$

$$\nabla\times\vec B = \mu_0\vec J$$

$$\oint \vec B\cdot d\vec S = 0.$$

$$\int_V \nabla\cdot\vec B\cdot dV = 0$$

$$\nabla\cdot\vec B = 0.$$

我们还可以从旋度与散度方面来说明 $\nabla\cdot\vec B = 0$.

从亥姆霍兹定理可以得到

$$\vec B = -\nabla\Phi + \nabla\times\vec A$$

其中 $\Phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\vec B(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV'$ $\vec A(\vec r) = \frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\nabla'\times\vec B(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV$.

由于 $\nabla'\cdot\vec B(\vec r') = 0$.

则. $\Phi(\vec r) = 0$. $\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec J(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV'$ 且 $\vec B = \nabla\times\vec A$.

因此也可以知道，无散场一定是一个矢量的旋度。

毕奥—萨伐尔通过实验给出磁感应强度和电流的关系，这里我们从数学推导。

$$\vec B = \nabla\times\vec A = \nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec J(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec J(\vec r')\cdot\nabla\times\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec J(\vec r')\times\frac{|\vec r-\vec r'|}{|\vec r-\vec r'|^3}\cdot dV'$$

由 $\vec J\cdot dV = I d\vec l$

$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_l\frac{I d\vec l'\times|\vec r-\vec r'|}{|\vec r-\vec r'|^3}$$

$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_l\frac{I d\vec l'}{|\vec r-\vec r'|}.$$

这就是毕奥萨伐尔定律的积分形式.

另外. 我们讨论一下. 关于 $\nabla\times\vec B = \mu_0\vec J$ 的问题.

由安培环路定律和毕奥萨伐尔定律可知磁场和电流有密不可分的关系. 而我们又知道. $\vec J = \sigma\vec E$. 所以磁场和电场也有关系.

另外，我们讨论一下关于 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ 的问题。
由安培环路定律和毕奥萨伐尔定律可知磁场和电流有密不可分的关系。而我们又知道 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$，所以磁场和电场也有关系。

$$\nabla\times\vec{B}=\nabla\times\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\nabla\cdot\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$$ 由于 $\vec{A}$ 的定义可知，$\nabla\cdot\vec{A}=0$。

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=-\nabla^2\vec{A}=\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

所以这里存在一个泊松方程。

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$$

而上节给到的例子是个特解，还有自由空间的解。
在无源区域，$\vec{J}=0$，则变为拉普拉斯方程

$$\nabla^2\vec{A}=0$$

泊松方程和拉普拉斯方程都可以用分离变量法求解。这个在量子力学的三维薛定谔方程中也有应用。详细的数学内容请参见以后的数学部分。
在计算磁通时，

$$\Phi=\int_S(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$

应用旋度定理，$\Phi=\oint_l\vec{A}\cdot d\vec{l}$，确立 $\vec{A}$ 和 Φ 之间的联系。
在无源区中

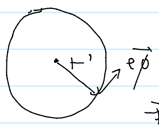
$\nabla\times\vec{B}=0$，则可以看成为一个梯度。

$\vec{B}=-\mu_0\nabla\varphi_m$。

$\rightarrow\nabla^2\varphi_m=0$。这也是个拉普拉斯方程。

5.3 介质的磁化

我们来计算下半径为 a，电流为 I 的小电流环产生的磁通密度。
由于是一个对称结构，所以为 e_ϕ 方向。不妨让场点在 x、z 平面内。



$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{I(\vec{r}')d\vec{l}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l\frac{\vec{e_\phi}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dl'$$

我们设场点与 z 轴正方向的夹角为 θ。
则

$$\vec{r}=(r\sin\theta)\vec{e_x}+(r\cos\theta)\vec{e_z}$$
$$\vec{r}'=(a\cos\phi')\vec{e_x}+(a\sin\phi')\vec{e_y}$$

所以 $|\vec{r}-\vec{r}'|=r\left[1+\left|\frac{a}{r}\right|^2-2\frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi'\right]^{\frac{1}{2}}$
又考虑到 $r\gg a$，再利用泰勒公式对 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 做一阶展开 $\approx1+\frac{x}{2}$

$|\vec{r}-\vec{r}'|$ 近似于 $\frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi'\right)$

$dl'=a\,d\phi$ $\qquad e_{\phi'}=e_y\cos\phi'-e_x\sin\phi'$

代入 $\vec{A}(\vec{r})$ 中，得

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0 I a}{4\pi r}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi'\right)(e_y\cos\phi'-e_x\sin\phi')\,d\phi'$$
$$=\vec{e_y}\frac{\mu_0 I a^2\sin\theta}{4r^2}$$

所以考虑到一般形式

$$\vec{A}(\vec{r})=\vec{e_\phi}\frac{\mu_0 IS\sin\theta}{4\pi r^2}$$ 磁矩 $m=e_z IS$

则 $\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0\vec{m}\times\vec{r}}{4\pi r^3}$

最后，用 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 得 $\vec{B}=\frac{\mu_0 IS}{4\pi r^3}\left[\vec{e_r}2\cos\theta+\vec{e_\theta}\sin\theta\right]$
我们可以得出磁偶极子的磁位和磁场强度的表达式

这种电流环在介质中也存在。
电子首先绕原子核旋转，称为轨道磁矩。
电子的自旋称为自旋磁矩。

电子首先绕原子核旋转，称为轨道磁矩。
电子的自旋称为自旋磁矩。
在无磁场时，磁矩的方向杂乱无章，当有外加磁场时，则宏观合成的磁矩不再为零。这个就叫做磁化
介质的磁化过程可以分为三类。

1) 抗磁性：原子的合成磁矩为零，当外加磁场时，电子的电流板子将会受到磁场力的作用发生运动。
运动的效果使合成磁场减弱。

a) 18??年约瑟夫·拉莫尔首先推论了拉莫尔频率，电子就像陀螺一样绕着外磁场运动。
这就是拉莫尔进动。这一部分需要有力矩和角动量的基础，以后会详细描述。

b) 此外，就牛顿力学定理可以解释产生一个相反的附加磁矩的问题。

银，铜等物质都具有这种性质

2) 顺磁性。原子的合成磁矩不为零，由于热运动的结果，宏观磁矩为零。这时加了磁场，磁矩会朝向外加磁场转动，使得合成磁场增强，这种特性称为顺磁性、虽然也存在电子的运动，但总体来看，只是增强。如：铝，镁顺性介质。

3) 铁磁性和亚铁磁性。

铁磁性介质和亚铁磁性在外场的作用下，会发生显著的磁化现象。内部存在"磁畴"，所谓"磁畴"
Magnet-Domain是指在铁磁性材料在自发磁化的过程中产生的方向各异的小型磁化区域。
在外磁场的作用下，会显示大的磁性。

亚铁磁性通常由金属氧化物组成。电导率很低 $\vec J = \sigma\vec E$，性质比铁磁性稍弱一些。

与极化作用相同，我们定义了单位体积中的磁矩矢量和，引入磁化强度，

$$\vec M = \sum_{i=1}^{N} m_i / \Delta V.$$

m_i为第i个磁偶极子具有的磁矩。由于电子发生运动，产生了新的电流，称为磁化电流，又称束缚电流
磁化电流密度为$\vec J$，磁化强度为$\vec M$。
我们来推导一下两者的关系。
我们根据磁偶极子的推导，

$$\vec A(\vec r) = \vec e_\phi \frac{\mu_0 I S \sin\theta}{4\pi r^2}$$

$$= \mu_0 \frac{\vec m \times \vec r}{4\pi r^3}$$

所以单位体积

$$d\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec M \times (\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3}\, dV$$

高斯定理

$$d\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \vec M \times \nabla'\left(\frac{1}{|\vec r - \vec r'|}\right) dV'$$

这里的推导过程与之前的推理相似

$$d\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{1}{|\vec r - \vec r'|}\nabla'\times \vec M(\vec r') - \nabla'\times\left[\frac{\vec M(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}\right] dV'$$

利用矢量恒等式

$$\int_{V'}(\nabla\times\vec A)\, dV' = \oint(\vec e_n\times\vec A)\, dS$$ 可以理解为广义的高斯公式

$$\Rightarrow \vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\nabla'\times\vec M(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}\, dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\vec M(\vec r')\times\vec e_n}{|\vec r - \vec r'|}\, dS'$$

对于 $\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec J(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}\, dV \Rightarrow \begin{array}{l}\vec J' = \nabla'\times\vec M(\vec r') \\ \vec J_s' = \vec M(\vec r')\times\vec e_n\end{array}$

所以

$$I' = \int_S \vec J'\cdot d\vec S = \oint_S(\nabla\times\vec M)\cdot dS = \oint_l \vec M\cdot d\vec l$$

表面磁化强度的环量等于该回路所围电流。
与极化相同，这样安培环路定律则变为

$$\oint_l \vec B\cdot d\vec l = \mu_0(I + I')$$

$$\oint_l \vec B\cdot d\vec l = \mu_0 I + \mu_0\oint_l \vec M\cdot d\vec l$$

$$\oint_l \left(\frac{\vec B}{\mu_0} - \vec M\right)\cdot d\vec l = I.$$

$$\oint_l \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \, d\vec{l} = I.$$

设 $\vec{B}/\mu_0 - \vec{M} = \vec{H}$

可以写为 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ ， $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

又与极化相同

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ 则

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H} = \vec{H}$$

$\vec{B} = \mu_0 (1+\chi_m) \vec{H}$ ， $\vec{B} = \mu \vec{H}$. 磁导率 μ.

我们可以看到磁场强度和电场强度有一些相似，但不完全一样.
这些只是定义上的问题和数学上的问题. 我们先定义了 $\vec{B}$. 给出了标准.
若我们先定义 $\vec{H}$， $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{H}$ ，则一切都会变化.
令一个问题. $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$ ，这里有个负号. 这也是格式上问题所致.

6. 小结.

电场和磁场有许多相似的联系. $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} = \mu\sigma\vec{E}$.
数学是最能精确描述的语言.
我们有亥姆霍兹定理. 高斯定理. 斯托克斯定理. 梯散旋.
我们还有一系列科学实验定律，例如. 库仑定律. 安培环路定律等.

在恒定场内，电场和磁场不随时间变化.

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ 这个是数学加实验的结果
$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{E} = -\nabla\phi$	$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 这是亥姆霍兹定理和实验的结果.
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ 　 $\vec{J} = \sigma\vec{E}$	$\vec{B} = \mu\vec{H}$

相似方程.

$$-\nabla^2 \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu\vec{J}$$

目前一切都很美好.

7. 时变电磁场

7.1. 电磁感应定律.

在有了安培定律之后，许多物理学家就开始寻找相应的磁效应.
法拉第最先用大量实验给出定律.
　不论用什么方法，只要穿过闭合电路的磁通量发生变化，闭合电路就有电流产生，这种现象称为电磁感应，但没有闭合电路时仍然有感应电动势存在，法拉第总结如下.
　1) 感应电动势的大小和磁通变化率成正比. $\varepsilon = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$. 若一个闭合电路为 n 匝的线圈. 又可以表示为 $\varepsilon = n\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$.
　2) 感应电动势的方向判断. 可以用楞次定律判定"来拒去留".
数学形式归纳
　存在感应电流就会存在感应电场. 以 $\vec{E}$ 表示.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

我们对其运用斯托克斯公式

$$\oint \nabla \times \vec{E} \, d\vec{S} = \varepsilon = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon = -\int \frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \cdot d\vec{S})$$

$$= -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} - \int_S \vec{B} \frac{\partial d\vec{S}}{\partial t}.$$

感应电场的变化与面积无关. 所以 $\frac{\partial d\vec{S}}{\partial t} = 0$，无论是否有感生电动势，都会有感生电场
则微分结果为

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$$

感应电场的变化与面积无关，所以 $\frac{\partial dS}{\partial t}=0$，无论是否有感生电动势，都会有感生电场

则微分结果为

$$\nabla\times\vec E = \frac{-\partial \vec B}{\partial t}$$

这时电场为 $\vec E = -\nabla\phi + \nabla\times\vec A$ 不仅为一个梯度场，还有旋度。

这里的电场的旋度不为0则是因为这已经不是一种静电力，而是一种非静电力，所以是感应电动势。

7-2 位移电流

电磁感应是磁场随着时间的变化产生了非静电场。

我们在此可讨论变化的电场，为了让推导更加顺利，这里研究电位移矢量 $\vec D$。

$$\oint_S \frac{\partial \vec D}{\partial t}\cdot d\vec S = \frac{\partial}{\partial t}\oint_S \vec D\cdot d\vec S = \frac{\partial q}{\partial t} = -\oint_S \vec J\cdot d\vec S$$

电场的变化会引起电荷的变化，从而引起了电位移矢量的变化和电流的变化。但是注意，我们在定义为电位移矢量时首先给定了 $\oint \vec E\cdot d\vec S = \frac{q}{\varepsilon}$ 但是，在变化的磁场中，电场有旋度，一定是无散的。所以这里我们从电位移矢量开始研究是很有必要的。

$$\oint_S\left(\frac{\partial\vec D}{\partial t}+\vec J\right)d\vec S = 0$$

微分为

$$\nabla\cdot\left(\vec J+\frac{\partial \vec D}{\partial t}\right)=0$$

$\frac{\partial\vec D}{\partial t}$ 我们可以定义为位移电流密度。这个原理也符合电荷守恒的实验现象，构成全电流连续性原理。

为什么我们前面没有发现这个原理呢，因为之前为恒定电流。

$$\oint_S \vec J\cdot d\vec S = 0 \qquad \frac{\partial\vec D}{\partial t}=0 \qquad , \vec J_d = \frac{\partial \vec D}{\partial t}$$

而安培环路定律中，也需要改写电流。

$$\oint \vec H\cdot d\vec l = \int_S \vec J + \vec J_d \, d\vec S$$

$$\nabla\times\vec H = \vec J + \frac{\partial\vec D}{\partial t}$$

7.3 麦克斯韦方程组

麦克斯韦的伟大之处在于他认为未必是用数学定性描述了各种实验结果，将各家分立的实验结果和分立的数学定理结合起来，使电磁学成为一门真正能为人类造福的科学。这其中，是众多科学家奋斗的结果，我现在能用电磁笔记笔记也都是无数前辈的奋斗结晶。

实验结果和数学都是无法违背的公理。对于时变电磁场的描述自然首先应从电场和磁场开始。

1) 我们从对电荷的力的作用定义了电场 $\vec F = q\vec E$

又从亥姆霍兹定理引出 $\vec E = -\nabla\phi+\nabla\times\vec A$，实验告知：电荷会产生电场，变化的磁场会产生电场。

电介质内部会有极化现象，引出了电偶极子的作用电荷密度，

麦克斯韦用高斯定理和斯托克斯公式描述了这些现象。

$$\oint \vec D\cdot d\vec S = q \qquad \nabla\cdot\vec D = \rho$$

$$\oint \vec E\cdot d\vec l = -\int_S \frac{\partial\vec B}{\partial t}d\vec S \qquad \nabla\times\vec E = -\frac{\partial\vec B}{\partial t}$$

其中 $\vec D = \varepsilon\vec E$

2) 我们用磁场对电荷的作用力定义了磁感应强度，这里虽然有些失误，但是并无太大问题。$\vec F = q\vec v\times\vec B$

又从亥姆霍兹定理引出 $\vec B = -\nabla\phi+\nabla\times\vec A$，实验得知：安培环路定律和磁场不能单独存在。

结合高斯定理和斯托克斯公式。

$$\oint \vec B\cdot d\vec S = 0 \qquad \nabla\cdot\vec B = 0$$

$$\oint \vec H\cdot d\vec l = \oint\left(\vec J+\frac{\partial\vec D}{\partial t}\right)\cdot d\vec S \qquad \nabla\times\vec H = \vec J + \frac{\partial \vec D}{\partial t}$$

电流的引入或者说电荷的变化是影响磁场的关键，介质的磁化也引出了 $\vec H$

麦克斯韦的总结如下

$$\begin{cases} \oint \vec H\cdot d\vec l = \int_S\left(\vec J+\frac{\partial\vec D}{\partial t}\right)d\vec S \\ \oint \vec E\cdot d\vec l = -\int_S \frac{\partial\vec B}{\partial t}d\vec S \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\times\vec H = \vec J + \frac{\partial\vec D}{\partial t} \\ \nabla\times\vec E = -\frac{\partial\vec B}{\partial t} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S} \\
\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\
\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla\cdot\vec{B} = 0 \\
\nabla\cdot\vec{D} = \rho
\end{cases}
$$

电流在其中起到了很关键的作用。因为我们的世界是唯物主义的，无论是电场和磁场，都是由电荷或其随时间的变化而产生。电流作为电荷的变化体现，自然十分重要。

我们还补充几个条件。

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \\
\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\
\vec{B} = \mu\vec{H} \\
\vec{J} = \sigma\vec{E} + \vec{J}'
\end{cases}
$$

$\vec{J}'$ 要说明一下，$\vec{J}'$ 代表产生时变电磁场的电流源或非电的外源。毕竟引起电荷变化了我们都要考虑。虽然先从静态场开始学习且不断加入新的概念会使学习的过程略显不适应，但总的来说，科学就是这样一点点进步的。我们是尊重数学和相信实验的结果，才会使科学不会成为伪科学。