分离变量法

2019年11月24日 10:34

这里所论述的分离变量法并不是常微分方程中，将x,y分别写入方程两侧的求解法，而是在物理中常用到的，当三维的函数看成在三个正交轴上毫不相干的分量乘积，则而将偏微分方程化成常微分方程。

但是这个方法通常在第一步就让人很摸不着头脑，为什么可以这么做？直接就分离虽然和常理有悖。

所以第一步自然先是简单讨论下他的理论基础。

0. 理论基础.

首先要从 Sturm-Liouville 方程说起，即斯图姆-刘维尔方程，简称S-L方程。

一个微分方程，

$$\mathcal{L}u(x) = p_0(x)\frac{d^2}{dx^2}u(x) + p_1(x)\frac{d}{dx}u(x) + p_2(x)u(x)$$

定义一个伴随算符，省略自变量(x)的书写。

$$\bar{\mathcal{L}}u = \frac{d^2}{dx^2}[p_0u] - \frac{d}{dx}[p_1u] + p_2u$$

把这个方程化开。

$$\bar{\mathcal{L}}u = p_0''u + p_0'u' + p_0'u' + p_0u'' - p_1'u - p_1\frac{d}{dx}u + p_2u$$

$$= p_0\frac{du^2}{dx^2} + (2p_0' - p_1)\frac{du}{dx} + (p_0'' - p_1' + p_2)u$$

如果 $\mathcal{L}u = \bar{\mathcal{L}}u$，则

$$\begin{cases} 2p_0' - p_1 = p_1 \\ p_0'' - p_1' + p_2 = p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0' = p_1 \\ p_0'' = p_1' \end{cases} \Rightarrow p_0'(x) = \frac{dp_0(x)}{dx} = p_1(x)$$

若上述条件满足，

$$\bar{\mathcal{L}}u = \mathcal{L}u = \frac{d}{dx}\left[p_1(x)\frac{d}{dx}u(x)\right] + p_2u(x)$$

，为了与维基百科内容相对应，$p_1(x) \to p(x)$，$p_2(x) \to q(x)$

下面考虑一下 S-L型本征方程。

$$\text{即：} \mathcal{L}u(x) = W(x)u(x) \Longrightarrow \mathcal{L}u(x) = \lambda W(x)u(x)$$

对于本征函数和本征值应满足以下条件。

- $p(x) > 0$，$W(x) > 0$
- $p(x)$，$p'(x)$，$W(x)$，$q(x)$ 均连续
- $u(x)$ 满足边界条件 $\alpha_1u(a) + \alpha_2u'(a) = 0$ 及 $\beta_1u(b) + \beta_2u'(b) = 0$ ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$，$\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$)

同时，伴随算符的本征函数和本征值有以下性质

1. 本征值 λ 是实数。
2. 厄米算符(上面的伴随算符)的本征函数是正交的
3. 厄米算符的本征函数是一个完备集

完备集的概念需要有点集拓扑学才能理解，是指拓扑空间的子集S的所有极限点的集合。

我们主要关心上述的第三个性质，这个的证明过程可以参考科朗和希尔伯特的数学物理方法。

这实际上是一个泛函分析的著名定理：无界自伴算子谱分解定理。

要真正的深入了解这个知识，需要完整的了解一遍泛函分析，而且证明过程极其复杂，不过要我等学渣深入研究。

借用格里菲斯的一句话。

正如上面所证明的，尽其复杂，恐怕大多物理学家只有怀着美好的愿望而简单的假定其成立。

——格里菲斯《量子力学概论》P23

我们继续关心上述的第三个性质，本征函数族 $\{\psi_i\}$ 是完备的，如果 $f(x)$ 具有连续的一阶导数和分段二阶导数，且满足本征函数族所满足的边界条件，就可以展开成为绝对且一致收敛的级数。

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\psi_i(x)$$

我们现在开始讨论分离变量法。

若本征解 $\chi(r,t)$，我们将它分离变量为 $\chi(r,t) = \psi(r)\phi(t)$。

将本征解代入 S-L 方程

$$\mathcal{L}\psi = \lambda\psi \qquad (1)$$

考本征解 $\chi(r,t)$，我们将它分离变量为 $\chi(r,t)=\varphi(r)\phi(t)$.

将本征解代入 S-L 方程

$$\mathcal{L}_1\varphi=\lambda\varphi \qquad (a)$$
$$\mathcal{L}_1\phi=\lambda\phi. \qquad (b)$$

从(a)式中可以得到一组完备的本征函数 $\{\varphi_i(r)\}$，从(b)式同理可以得到 $\{\phi_i(t)\}$.

所以，原方程的通解可以展开成级数

$$u(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(t)\varphi_i(r)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i(t)}{\phi_i(t)}\varphi_i(r)\phi_i(t)$$

同理

$$u(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}g_i(r)\phi_i(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i(r)}{\varphi_i(r)}\varphi_i(r)\phi_i(t).$$

两式相等.则 $\dfrac{f_i(t)}{\phi_i(t)}=\dfrac{g_i(r)}{\varphi_i(r)}$ 为个常数 a_i

所以方程的通解为

$$u(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\varphi_i(r)\phi_i(t).$$

对于一般形式的二阶常微分方程

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0.$$

我们两边同时乘以积分因子.

$$u(x)=\frac{1}{P(x)}e^{\int\frac{Q(x)}{P(x)}dx}.$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dx}(u(x)P(x)y')+u(x)R(x)y=0. \quad (常数变易法)$$

总结一下：我们假设偏微分方程可分离.将分离得到的常微分方程用S-L方程的一般形式和边界条件写出.这样本征函数一定是完备的.写成是可分离变量的形式

1. 直角坐标系的分离变量法.

在直角坐标系中.拉普拉斯方程为.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0.$$

假设

$$\phi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z).$$

代入原式

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2}+XZ\frac{d^2Y}{dy^2}+XY\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}=0.$$

由于分离了变量.这三项必须分别为常数(否则联立了就无法分离变量了).

$$\frac{X''}{X}=\alpha^2,\quad \frac{Y''}{Y}=\beta^2,\quad \frac{Z''}{Z}=\gamma^2,\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$

我们以 $\frac{X''}{X}=\alpha^2$ 为例. $X''-\alpha^2X=0.$

则 $P(x)=1$. $Q(x)=-\alpha^2$. 我们代入 S-L 方程. α^2 是我们要的特征值 λ.

λ 的给定依赖于边界条件. 所以这也是写成 α^2 的原因，只要 X 满足 S-L 方程和规定的边界条件就行.

之后就是解微分方程的问题了. 当然如果边界条件为周期的.也要使用级数计算.

2. 圆柱坐标中的分离变量法.

我们首先要搞清楚.算子是如何定义的

$$\nabla(\phi)=\mathrm{grad}(\phi)=\frac{\partial\phi}{h_1\partial u_1}\vec{e_{u_1}}+\frac{\partial\phi}{h_2\partial u_2}\vec{e_{u_2}}+\frac{\partial\phi}{h_3\partial u_3}\vec{e_{u_3}}$$

$$\nabla\cdot(\vec{F})=\frac{1}{h_1h_2h_3\,du_1du_2du_3}\left(\frac{\partial h_2h_3F_1}{\partial u_1}du_1du_2du_3+\frac{\partial h_1h_3F_2}{\partial u_2}du_1du_2du_3+\frac{\partial h_1h_2F_3}{\partial u_3}du_1du_2du_3\right)$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial h_2h_3F_1}{\partial u_1}+\frac{\partial h_1h_3F_2}{\partial u_2}+\frac{\partial h_1h_2F_3}{\partial u_3}\right).$$

所以 $\nabla^2\phi=\nabla\cdot\nabla\phi.$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(\cdots)}{\partial u_1} + \frac{\partial(\cdots)}{\partial u_2} + \frac{\partial(\cdots)}{\partial u_3}\right).$$

所以 $\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi$.

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left[h_2h_3\frac{\partial\phi}{h_1\partial u_1}\right] + \frac{\partial}{\partial u_2}\left[h_1h_3\frac{\partial\phi}{h_2\partial u_2}\right] + \frac{\partial}{\partial u_3}\left[h_1h_2\frac{\partial\phi}{h_3\partial u_3}\right]\right).$$

在圆柱坐标中

$u_1 = r \quad u_2 = \theta \quad u_3 = z. \quad h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = 1.$

则

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial z}\right).\right].$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

这里我们仅仅考虑与 z 无关的情况.（与 z 有关则还是需要参考数理方程的教科书）

$$\phi = R(r)\Phi(\theta)$$

代入上式

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial R\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 R\Phi}{\partial\theta^2} = 0.$$

两边同乘 $\frac{r^2}{R\Phi}$ 得

$$\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0.$$

由于分离变量，则

$$\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) = n^2 = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta^2}$$

即 $\quad r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - n^2R = 0. \quad$ 和 $\quad \frac{d^2\Phi}{d\theta^2} + n^2\Phi = 0.$

先解左式：我们假设 R 为 r 的多项式，$R = r^a$.

$$a(a-1)r^a + ar^a - n^2\cdot r^a = 0 \Rightarrow a^2 - n^2 = 0 \Rightarrow a^2 = n^2. \quad a = \pm n.$$

则 $\quad R = ar^n + br^{-n}$，这里 a, b 为常数、根据边界条件求解. 　　注意：这里应该是 $n \neq 0$.

再解右式：很普通的常微分方程. 特征值为两共轭复根. 上面，

所以 $\quad \Phi = c\cdot\cos n\theta + d\sin n\theta$.（这里的具体解法可以参考常微分方程的笔记）

通常. 对于圆形区域 $\Phi(\theta) = \Phi(2m\pi + \theta)$ 由此得 n 必为整数. 这也是我们将本征值写作 n 的原因.

在第一部分理论基础中. 我们讨论过根据不同的本征值. 本征函数族是完备的. 也就是可以写成级数的形式

通解. $\phi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i R_i(r)\Phi(\theta)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_i\left[a\cdot r^n(c\cos n\theta + d\sin n\theta) + b r^{-n}(c\cos n\theta + d\sin n\theta)\right].$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(\underbrace{a_iac}_{A_n}\cdot\cos n\theta + \underbrace{a_i\cdot ad}_{B_n}\sin n\theta\right) + r^{-n}\left(\underbrace{a_ibc}_{C_n}\cdot\cos n\theta + \underbrace{a_ibd}_{D_n}\sin n\theta\right)$$

我们才需要加上一个 n=0 时的特解.

当 n=0 时. $\quad \Phi_0(\phi) = A_0\phi + B_0 \quad$ 由此得到 $\varphi_0 = \Phi_0R_0$，注意，这里已经是 A_0, B_0, C_0, D_0 的形式了.

$\quad R_0(r) = C_0\ln r + D_0.$

我们可以根据特定的情况来计算. $\varphi_0 = \Phi_0R_0$

3. 球坐标系的分离变量法.

在圆柱坐标系中其实已经讨论过坐标系变换的普遍情形. 这里我们仍然忽略与 ϕ 有关的物.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0.$$

忽略后. 上式变为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = 0.$$

注意！这里的 θ 和上面圆柱坐标系的 θ 含义不同. 从大写字母 Φ 可以看出. 圆柱坐标应将 θ 写为 φ，上面为了分清 φ 和 ϕ. 改写了大写字母. 需要注意！

分离变量.

$$\phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

则

分离变量：

$$\phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

则

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = 0.$$

分离后，

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = k. \quad \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -k.$$

右式由于含有 $\sin\theta$，不好化为标准形式，这里直接应用勒让德方程。

设 $x = \cos\theta$，则方程变为

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right] + k\Theta = 0.$$

S-L 方程的特征值为 k.

该方程的解中有幂级数形式，且在 $-1<x<1$ 时收敛。若 $k=n(n+1)$，其中 n 为正整数，则收敛域为 $-1\le x\le 1$.

当 $k=n(n+1)$，级数 $P_n(x)$ 为

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

大概观察可以发现，可以用泰勒展开。这里直接给出前几项。

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta.$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta).$$

这个多项式也是正交函数族。

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)\,dx = \int_0^{\pi} P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\,d\theta = \frac{2}{2n+1}\delta(nm).$$

对于左式，代入 $k=n(n+1)$ 得

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-1}$$ ，A_n, B_n 为待定系数.

最后同理叠加得，

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + B_n r^{-n-1}\right)P_n(\cos\theta)$$