电磁感应

2019年11月13日 21:22

0. 概述.

电磁感应主要解决的是磁生电既电磁感应. 由于Jacobs老师之前已经推导过了时变电磁场的麦克斯韦方程.
那么用数学来表示则是.

$$\int_S \left[\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right]\cdot d\vec{S} \quad , \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

1. 电磁感应定律

这个定律是实验得来的. 用楞次定律来表述即. 线圈中感应电流的感应磁通方向总是阻碍导体有磁通的变化.
所以感应磁通用来称为反磁通. 用数学语言来描述为

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

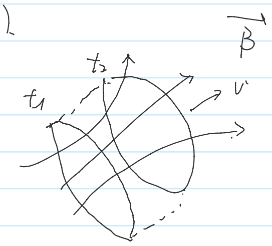
电动势的正方向和磁通方向构成右旋定则. 因此有一个更直接的为左手定则.
我们将感应电场记为 $\vec{E}$. 则有.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}\right].$$

利用斯托克斯公式

$$\int_S \left[\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right]\cdot d\vec{S} = 0. \quad \text{微分形式则为} \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

它表明: 某点磁通密度的时间变化率负值等于该点时变电磁场的强度.
同样. 也有动生电动势的说法. 我们可以当感应电动势等价的认为是导线切割磁场线感应产生电动势. 或者说作用机理是切割磁感线.
我们来证明 (运动的线圈等价于静止线圈穿过变化磁通 (对于恒定磁场)
如图. 线圈在dt时刻内在恒定磁场内以速度 $\vec{v}$ 运动. 那么如图可以
发现构成了一个闭合柱形. 设 t_1 时刻线圈的磁通为 Φ_1. t_2 为 Φ_2.
侧面 S' 的磁通为 Φ', 那么有.



$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi' = 0.$$

等于0是由恒定磁场的性质得到的. 那么有

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -\Phi'$$

可见dt时间内穿过线圈的磁通增量 $d\Phi$ 为

$$d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -\Phi'$$

由 $\int_{S'} \vec{B}\cdot d\vec{S'} = \Phi'$ 得 $\int_{S'} \vec{B}\cdot d\vec{S'} = -d\Phi$.

也就是说. 磁通的减少量则是侧面的磁通量. 那么我们若证明运动的线圈与此等价. 则可说明与感应电动势等价.
下面我们来说明导线切割磁场线产生的电动势.
若线元内的自由电荷为q. 则以受到的磁场力 $\vec{F}$ 为

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

若这个力由感应电场提供. $\vec{E} = \vec{F}/q = \vec{v}\times\vec{B}$
所以 $d\vec{l}$ 的感应电动势 de 为

$$de = \vec{E}\cdot d\vec{l} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = (d\vec{l}\times\vec{v})\cdot\vec{B}$$

若dt时间内 $d\vec{l}$ 的位移为 $d\vec{r}$. 则线圈的速度 $\vec{v}$ 可写为 $d\vec{r}/dt$
那么可得.

$$de = \left(d\vec{l}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\cdot\vec{B}$$

对环路积分可得.

$$e = \oint_l de = \oint \left(d\vec{l}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\cdot\vec{B}$$

考虑到 $d\vec{l}\times d\vec{r} = d\vec{S'}$, 那么上式可写为.

$$e = \int_{S'} \vec{B}\cdot\left(\frac{d\vec{S'}}{dt}\right)$$

考虑到 $d\vec{l}\times d\vec{r}' = d\vec{S}'$，那么上式可写为

$$e=\int_{S'}\vec{B}\cdot\left(\frac{d\vec{S}'}{dt}\right)$$

这与上面的静止线圈内有变化的磁场等价。由此我们说明了，

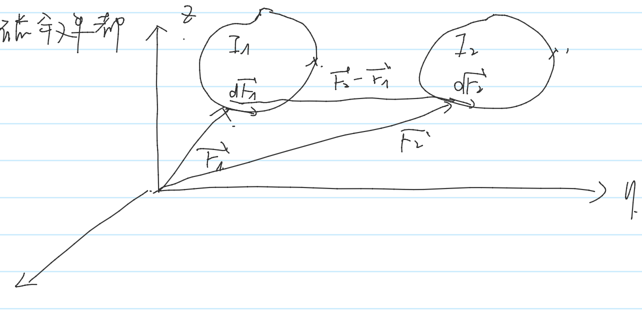
恒定磁场内运动线圈 = 静止线圈的磁通变化 = 导线切割磁感线。

2. 电感

从数学上来说，电感的定义式为

$$L=\frac{\psi}{I}$$

单位为亨(H)。需说明的是电感仅与线圈本身的尺寸，大小有关，与电流大小无关。
从数学上来说，$\psi = N\Phi$，而 $\Phi=\oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}$，$\vec{A}$ 与 I 又成正比，所以 L 与 I 无关。
与自感相对应有互感，我们举一个简单的模型来说明。
如图，线圈流过的电流分别为 I_1, I_2，对于每一个线圈的磁链都由两部分组成。



$$\psi_1 = \psi_{11}+\psi_{12}$$
$$\psi_2=\psi_{21}+\psi_{22}$$

其中，
ψ_1,ψ_2 代表与回路 I_1,I_2 产生的磁通链
ψ_{11},ψ_{22} 代表是由 I_1, I_2 本身产生的。
ψ_{12},ψ_{21} 代表是由另一线圈产生。例如 ψ_{12} 则是 I_2 产生的磁场在线圈 I_1 中的磁链。

由电感的定义可得，

$$\psi_1 = L_1\cdot I_1 + M_{12}\cdot I_2$$
$$\psi_2 = M_{21} I_1 + L_2\cdot I_2$$

M 叫做互感。由于这都是线圈本身的性质，那么 $M_{12}=M_{21}$。我们这里简单证明。

$$\psi_{21}=\oint_{l_2}\vec{A_1}\cdot d\vec{l_2}$$，其中 $$\vec{A_1}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{I_1(\vec{r_1})}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|}d\vec{l_1}$$

由于 $I_1(\vec{r_1})$ 为常量，则

$$\vec{A_1}=\frac{\mu I_1}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{d\vec{l_1}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|}$$

代入公式中，

$$\psi_{21}=\frac{\mu I_1}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{d\vec{l_1}\cdot d\vec{l_2}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|}$$

那么除去 I_1 可得，同理，可得

$$M_{21}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{d\vec{l_1}\cdot d\vec{l_2}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|}\qquad M_{12}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l_1}\cdot d\vec{l_2}}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|}\qquad M_{21}=M_{12}$$

由此得证。同时我们还可以看出，互感的大小与 $\vec{l_1}$ 和 $\vec{l_2}$ 的方向有关，当 $\vec{l_1}$ 和 $\vec{l_2}$ 相互垂直互感为0，平行时则达到最大值。这对于工程设计有一定的要求。此外，应该注意，互感可正可负，其值的正负性取决两个线圈的电流方向，但自感始终为正值。

3. 磁场的能量

磁场的能量和电场的能量可以理解成为电感和电容的能量。我们这里仅先讨论磁场。
由楞次定律可知，感生电动势总是阻碍原磁场，那么可以看成是对原磁场变化的克服，那么就存在对外做功。若原磁场是由外源提供，那么可以理解成电感储存了外源的能量。
我们先讨论一个电感的情形，这时只有自感。

感生电动势 $e=-\frac{d\psi}{dt}$

功率 $p=UI$，由于功率为正，我们记 $U=-e$。

那么，能量

$$W=\int p\,dt=\int\frac{d\psi}{dt}\cdot I\cdot dt=\int d\psi\cdot I$$

而我们有 $\psi = L\cdot I$，则

$$W=\int P\,dt=\int \frac{d\psi}{dt}\cdot I\cdot dt=\int d\psi\cdot I.$$

而我们有 $\psi = L\cdot I$. 则

$$W=\int L\cdot dI\cdot I=\frac{1}{2}LI^2 \quad 或 \quad W=\int\frac{\psi}{L}d\psi=\frac{1}{2}\frac{\psi^2}{L}=\frac{1}{2}\psi I.$$

对于多个电感，不仅存在自感和互感，我们假设有N个回路，那么第j个回路的磁链如下。

$$\psi_j = M_{j1}\cdot I_1 + M_{j2}\cdot I_2+\cdots+L_j\cdot I_j+\cdots M_{jN}\cdot I_N.$$

电流的大小是一个变化的过程，由于过程并不影响最后能量的大小，我们始终可以简化成电流是以同一比例增大，即

$$I_j(t)=a(t)\cdot I_j.$$

那么，我们可以得到

$$\psi_j(t)=a(t)\cdot\psi_j.$$

对于N个回路

$$W=\int P\,dt=\int\sum_{j=1}^{N} I_j(t)\cdot\frac{d\psi_j(t)}{dt}\cdot dt=\sum_{j=1}^{N}\int_0^1 a(t)\cdot I_j\cdot\psi_j\cdot d[a(t)]$$

$$=\sum_{j=1}^{N} I_j\cdot\psi_j\cdot\frac{1}{2}$$

这样，若已知各回路的电流和磁通量，根据上式即可计算这些回路共同产生的能量

我们还希望知道空间某点的磁场能量密度，我们希望知道磁场能量与$\vec B$或$\vec H$的关系，我们可以从ψ和$\vec A$的关系来推导。

$$\psi_j=\int_{l_j}\vec A\cdot d\vec l_j \Rightarrow W=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\oint I_j\cdot\vec A\cdot d\vec l_j$$

若电流分别分布在体积或面积上，我们可以利用 $I d\vec l=\vec J\,dV=\vec J_s dS$.

最普遍的情形则是三维体积 dV，这时我们可以表示整个空间，从而省略累加符号。

$$W_m=\frac{1}{2}\int_V\vec A\cdot\vec J\,dV$$

利用安培环路定律 $\vec J=\nabla\times\vec H$，则 $\vec A\cdot\vec J=\vec A\cdot\nabla\times\vec H$，而

$$\nabla\cdot(\vec A\times\vec H)=A\cdot(\nabla\times\vec H)-\vec H\cdot\nabla\times\vec A$$
$$=A\cdot(\nabla\times\vec H)-\vec H\cdot\vec B$$

这是一个很常见的变形思路，因为我们希望出现$\vec H$和$\nabla\times\vec A$还会使用这个公式，并不会随便想到的。

代入得

$$W_m=\frac{1}{2}\int_V\nabla\cdot(\vec A\times\vec H)+\vec H\cdot\vec B\,dV.$$

那么对于无限大的空间

$$\frac{1}{2}\int_V\nabla\cdot(\vec A\times\vec H)dV=\frac{1}{2}\oint_S(\vec A\times\vec H)\cdot d\vec S$$

$$\vec A\sim\frac{1}{r},\ \vec H\sim\frac{1}{r^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\int_V\nabla\cdot(\vec A\times\vec H)dV\longrightarrow 0.$$

则 W_m只有第二项。

$$W_m=\frac{1}{2}\int_V\vec H\cdot\vec B\,dV.$$

密度为 $\frac{1}{2}\vec H\cdot\vec B$，对于同性介质有 $\vec B=\mu\vec H$，则磁场能量密度又可以表示为 $\frac{1}{2}\mu H^2$

由于能量密度和H不成正比，那么则不为线性，也就不满足叠加原理

我们在开头也提到磁场和电场是对偶问题，这里我们也就不加推导直接给出结果。

$$W_e=\int_0^Q\varphi(q)\,dq=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\phi Q.$$

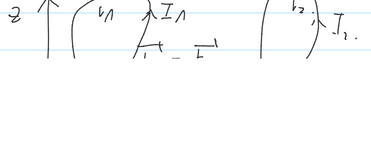
$$W_e=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i Q_i\int_0^1\alpha\,d\alpha=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\varphi_i Q_i$$

$$w_e=\frac{1}{2}\vec D\cdot\vec E=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

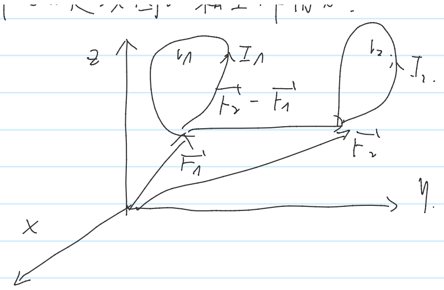
4. 磁场力。

根据磁感应强度$\vec B$的定义我们已经知道 $\vec F=q\vec v\times\vec B$，我们这里主要讨论的是线圈的相互作用力。

依旧是这个图，由 $d\vec F=I d\vec l\times\vec B$，我们可以得到，由回路$l_1$产生的磁场对回路$l_2$的作用力 $d\vec F_{21}$为



依旧是这个图，由 $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$，我们可以得到，由回路 I_1 产生的磁场 $\vec{B_1}$ 对回路 $I_2 d\vec{l_2}$ 的作用力 $d\vec{F}_{21}$ 为



$$d\vec{F}_{21} = I_2 d\vec{l_2} \times \vec{B_1}$$

其中，

$$\vec{B_1}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\oint \frac{I_1 d\vec{l_1} \times (\vec{r_2}-\vec{r_1})}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^3}.$$

代入 $d\vec{F}_{21}$ 并对 I_2 环路积分可得

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2} \frac{I_2 d\vec{l_2} \times [I_1 d\vec{l_1} \times (\vec{r_2}-\vec{r_1})]}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^3}.$$

同理我们还可以得到

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2} \frac{I_1 d\vec{l_1} \times [I_2 d\vec{l_2} \times (\vec{r_1}-\vec{r_2})]}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^3}.$$

由牛顿第三定律可知 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$，数学上通过上面的表达式也可以验证，但这里就不再过多描述了。
我们可以看到实际上这个积分并不好算，那么在一种极端情况下，我们可以采用另一种相对简便的办法。
对于这样的一个系统来说，外源作的功 $W = \int P\,dt = \int UI\,dt = I_1\psi_1 + I_2\psi_2$.
而磁场能量为 $W_m = \frac{1}{2}I_1\psi_1 + \frac{1}{2}I_2\psi_2$.
那么有

$$\vec{F}\,d\vec{l} + dW_m = dW. \quad 且\ W = 2W_m.$$

我们依此可以得到

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial l}\Big|_{I=常数} \quad 或 \quad F = -\frac{\partial W}{\partial l}\Big|_{\psi 为常数}.$$